Słabe spójniki logiczne

Anna Król

Instytut Matematyki, Uniwersytet Rzeszowski

Plan prezentacji

- Cel pracy
- Uwagi historyczne
- Rodzaje spójników
- Generowanie nowych spójników
- Literatura

Cel pracy

- Badanie słabych spójników logiki wielowartościowej
- Metody generowania nowych spójników
- Kompletowanie zestawów spójników logicznych,
dla których spełnione są odpowiedniki określonych praw rachunku zdań
- Badanie zależności wzorowanych na prawach rachunku zdań

Uwagi historyczne

- J. Łukasiewicz 1920, 1923 - logika wielowartościowa
- B. Schweizer, A. Sklar 1960 - normy, konormy trójkątne, czyli półgrupy uporządkowane w [0,1] z elementem neutralnym na końcu przedziału
- L. Zadeh 1965 - zbiory rozmyte, relacje rozmyte
- R. Bellman, M. Giertz 1973 - charakteryzacja minimum i maksimum w rodzinie słabych spójników wielowartościowych postaci $C, D : [0,1]^2 \to [0,1]$
- J. Fodor, M. Roubens 1994 - rodziny spójników wielowartościowych opartych na normach trójkątnych

Pierwsze spójniki logiki wielowartościowej:

$$
\begin{array}{ll}
C = \min, \quad D = \max & \text{(Łukasiewicz 1923)}, \\
C(x,y) = \max(x+y-1,0), \quad D(x,y) = \min(x+y,1) & \text{(Fréchet 1930)}, \\
C(x,y) = xy, \quad D(x,y) = x+y-xy & \text{(Reichenbach 1935)}, \\
I_{\text{ŁK}}(x,y) = \min(1-x+y,1) & \text{(Łukasiewicz 1923)}, \\
I_{GD}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ y, & x > y \end{cases} & \text{(Gödel 1932)}, \\
I_{RC}(x,y) = 1-x+xy & \text{(Reichenbach 1935)}, \\
I_{DN}(x,y) = \max(1-x,y) & \text{(Dienes 1949)}, \\
I_{GG}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases} & \text{(Goguen 1969)}, \\
N(x) = I(x,0) & \text{(Łukasiewicz 1923)},
\end{array}
$$

$x, y \in [0,1]$.

Postulaty dla uogólnionych spójników logicznych:

• uogólnienie klasycznych spójników logicznych powinno zachowywać odpowiednie tabelki zero-jedynkowe,

• na wzór monotoniczności w tabelkach spójników logicznych postuluje się monotoniczność względem odpowiednich zmiennych,

• aksjomaty typu algebraicznego takie jak: łączność, przemienność, idempotentność, element neutralny czy zerowy,

• zależności między kilkoma działaniami takimi jak: prawa de Morgana, pochłanianie, rozdzielność, prawo kontrapozycji,

• założenia o regularności takie jak ciągłość, wypukłość, warunek Lipschitza lub przynależność do odpowiedniej klasy funkcji elementarnych.

Rodzaje spójników

Definicja 1 (Fodor, Roubens 1994). Funkcję $N\colon [0,1] \to [0,1]$ nazywamy negacją rozmytą (fuzzy negation), gdy jest malejąca i spełnia warunki $N(0) = 1,\ N(1) = 0$. Negację N nazywamy ścisłą (strict negation), gdy jest bijekcją oraz silną (strong negation), gdy jest inwolucją.

Wniosek 1. Negacje ścisłe i negacje silne są ciągłe, a każda silna negacja rozmyta jest ścisła.

Przykład 1. Negacja standardowa (Łukasiewicza) $N_S(x) = 1 - x$ dla $x \in [0,1]$ jest silna, a negacja postaci $N(x) = 1 - x^2$ dla $x \in [0,1]$ jest ścisła.
Najmniejsza i największa negacja wyrażają się wzorami:

$$N_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x = 0 \\ 0, & \text{gdy} \quad x > 0 \end{cases}, \qquad N_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x < 1 \\ 0, & \text{gdy} \quad x = 1 \end{cases}.$$

Sugeno (1977) rozważał jednoparametrową rodzinę negacji silnych, które są funkcjami wymiernymi

$$N^\lambda(x) = \frac{1 - x}{1 + \lambda x},\ x \in [0,1],\ \lambda \in (-1, \infty).$$

Twierdzenie 1 (Alsina, Trillas 1983). *Każda negacja silna jest porządkowo izomorficzna z negacją standardową, czyli istnieje bijekcja rosnąca* $\phi : [0,1] \to [0,1]$ *taka, że* $N(x) = \phi^{-1}(1 - \phi(x))$, $x \in [0,1]$.

Definicja 2 (Baczyński, Jayaram 2008). Negację rozmytą N nazywamy:
- nieznikającą (non-vanishing negation), gdy $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$,
- niewypełniającą (non-filling negation), gdy $N(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Przykład 2. Każda ścisła (silna) negacja rozmyta jest nieznikająca i niewypełniająca. Najmniejsza negacja rozmyta jest nieznikająca, największa - niewypełniająca.

Twierdzenie 2 (Baczyński, Jayaram 2008). *Rodzina wszystkich negacji rozmytych jest zupełną, nieskończenie rozdzielną kratą. Rodzina ścisłych (silnych) negacji jest kratą rozdzielną.*

Definicja 3 (Baczyński, Jayaram 2008). Działanie $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy koniunkcją rozmytą (fuzzy conjunction), gdy jest rosnące ze względu na każdą ze zmiennych oraz

$$C(1,1) = 1, \quad C(0,0) = C(0,1) = C(1,0) = 0.$$

Działanie $D : [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy alternatywą rozmytą (fuzzy disjunction), gdy jest rosnące ze względu na każdą ze zmiennych oraz

$$D(0,0) = 0, \quad D(0,1) = D(1,0) = D(1,1) = 1.$$

Przykład 3. Poniższe wzory określają najczęściej stosowane koniunkcje i alternatywy rozmyte:

$$\begin{aligned}
&T_M(x,y) = \min(x,y), && S_M(x,y) = \max(x,y),\\
&T_P(x,y) = xy, && S_P(x,y) = x + y - xy,\\
&T_L(x,y) = \max(x+y-1, 0), && S_L(x,y) = \min(x+y, 1),\\
&T_D(x,y) = \begin{cases} x, & dla\ y = 1 \\ y, & dla\ x = 1 \\ 0 & poza\ tym \end{cases}, && S_D(x,y) = \begin{cases} x, & dla\ y = 0 \\ y, & dla\ x = 0 \\ 1 & poza\ tym \end{cases},
\end{aligned}$$

gdzie $x, y \in [0,1]$.

Definicja 4. Koniunkcję rozmytą $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy:
• półnormą trójkątną (t-seminorm, Cooman 1994), gdy jest działaniem z elementem neutralnym 1,
• pseudonormą trójkątną (pseudo-t-norm, Flondor i in. 2001), gdy jest działaniem łącznym z elementem neutralnym 1,
• normą trójkątną (t-norm, Schweizer, Sklar 1960), gdy jest działaniem przemiennym i łącznym z elementem neutralnym 1.

Twierdzenie 3 (Klement i in. 2000). *Norma trójkątna ciągła* T *spełnia warunek* $T(x,x) < x$, $x \in (0,1)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka bijekcja rosnąca* $\phi : [0,1] \to [0,1]$, *że* T *wyraża się wzorem*

$$T(x,y) = \phi^{-1}(\phi(x)\phi(y)), \quad x,y \in [0,1]$$

lub

$$T(x,y) = \phi^{-1}(max(\phi(x) + \phi(y) - 1, 0)), \quad x,y \in [0,1].$$

Twierdzenie 4. *Zbiór wszystkich koniunkcji rozmytych (półnorm trójkątnych) jest wypukły i jest kratą.*

Definicja 5. Alternatywę rozmytą $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy:
• półkonormą trójkątną (t-semiconorm), gdy jest działaniem z elementem neutralnym 0,
• pseudokonormą trójkątną (pseudo-t-conorm), gdy jest działaniem łącznym z elementem neutralnym 0,
• konormą trójkątną (t-conorm, Schweizer, Sklar 1960), gdy jest działaniem przemiennym i łącznym z elementem neutralnym 0.

Twierdzenie 5 (Klement i in. 2000). *Konorma trójkątna ciągła S spełnia warunek $S(x;x) > x$, $x \in (0,1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka bijekcja rosnąca $\phi : [0,1] \to [0,1]$, że S wyraża się wzorem*

$$S(x,y) = \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y) - \phi(x)\phi(y)), \quad x, y \in [0,1]$$

lub

$$S(x,y) = \phi^{-1}(min(\phi(x) + \phi(y), 1)), \quad x, y \in [0,1].$$

Twierdzenie 6. *Zbiór wszystkich alternatyw rozmytych (półkonorm trójkątnych) jest wypukły i jest kratą.*

Definicja 6 (Baczyński, Jayaram 2008). Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy implikacją rozmytą (fuzzy implication), gdy jest malejąca ze względu na pierwszą zmienną, rosnąca ze względu na drugą zmienną oraz spełnione są warunki

$$I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1, \quad I(1,0) = 0.$$

Mówimy, że implikacja rozmyta I spełnia prawo:
- neutralności (neutral property), gdy $I(1,y) = y,\ y \in [0,1]$,
- komutacji (exchange principle), gdy $I((x, I(y,z)) = I(y, I(x,z)),\ x,y,z \in [0,1]$,
- identyczności (identity principle), gdy $I(x,x) = 1,\ x \in [0,1]$,
- porządku (ordering property), gdy $I(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \leqslant y,\ x,y \in [0,1]$,
- kontrapozycji (contraposition property), gdy $I(x,y) = I(N(y), N(x)),\ x,y \in [0,1]$.

Twierdzenie 7 (Baczyński, Jayaram 2008). *Rodzina wszystkich implikacji rozmytych jest kratą zupełną, nieskończenie rozdzielną. Są to także wypukłe zbiory funkcji.*

Twierdzenie 8 (Baczyński, Jayaram 2008). *Zbiór wszystkich implikacji rozmytych spełniających prawo kontrapozycji (prawo identyczności, neutralności, porządku) jest kratą. Jest to także wypukły zbiór funkcji.*

Generowanie implikacji przy pomocy koniunkcji, alternatywy i negacji

Twierdzenie 9 (Baczyński, Jayaram 2008). *Niech N będzie negacją rozmytą, C koniunkcją rozmytą, a D alternatywą rozmytą.*

- *Funkcja postaci*

$$I(x, y) = D(N(x), y), \qquad x, y \in [0, 1]$$

jest implikacją rozmytą. Ponadto, jeżeli D jest konormą trójkątną, to I spełnia prawa neutralności i komutacji.

- *Jeżeli C jest dodatkowo lewostronnie ciągłą normą trójkątną, to funkcja określona wzorem*

$$I(x, y) = \max\{t \in [0, 1] : C(x, t) \leqslant y\}, \qquad x, y \in [0, 1]$$

jest implikacją rozmytą. Ponadto I spełnia prawa neutralności, komutacji, porządku oraz identyczności.

- *Jeżeli funkcja postaci*

$$I(x, y) = D(N(x), C(x, y)), \qquad x, y \in [0, 1]$$

jest malejąca ze względu na pierwszą zmienną, to jest implikacją rozmytą. Ponadto I spełnia prawo neutralności.

Definicja 7. Implikacje z powyższego twierdzenia nazywamy odpowiednio: (D, N)-implikacją, implikacją rezydualną (R-implikacją), QL-implikacją.

Przykład 4. Poniższe wzory określają najczęściej stosowane implikacje rozmyte:

$$I_{ŁK}(x,y) = \min(1-x+y,1), \qquad I_{GG}(x,y) = \begin{cases} 1, & gdy\ x \leqslant y \\ \frac{y}{x}, & gdy\ x > y \end{cases},$$

$$I_{GD}(x,y) = \begin{cases} 1, & gdy\ x \leqslant y \\ y, & gdy\ x > y \end{cases}, \qquad I_{RS}(x,y) = \begin{cases} 1, & gdy\ x \leqslant y \\ 0, & gdy\ x > y \end{cases},$$

$$I_{RC}(x,y) = 1-x+xy, \qquad I_{YG}(x,y) = \begin{cases} 1, & gdy\ x = 0\ i\ y = 0 \\ y^x, & gdy\ x > 0\ lub\ y > 0 \end{cases},$$

$$I_{DN}(x,y) = \max(1-x,y), \qquad I_{FD}(x,y) = \begin{cases} 1, & gdy\ x \leqslant y \\ \max(1-x,y), & gdy\ x > y \end{cases}.$$

Przykład 5. Dla negacji standardowej mamy następujące (D,N)-implikacje: $I_{DN}(D = S_M)$, $I_{RC}(D = S_P)$, $I_{LK}(D = S_L)$. R-implikacje to: $I_{GD}(C = T_M)$, $I_{GG}(C = T_P)$, $I_{LK}(C = T_{LK})$. Implikacje I_{DN}, I_{RC} i I_{LK} są także QL-implikacjami.

Prawo \ Implikacja	I_{LK}	I_{RC}	I_{DN}	I_{GD}	I_{GG}	I_{RS}	I_{YG}	I_{FD}
neutralności	+	+	+	+	+	−	+	+
komutacji	+	+	+	+	+	−	+	+
identyczności	+	+	−	−	+	+	−	+
porządku	+	+	−	−	+	+	−	+
kontrapozycji	+	−	+	−	−	+	−	+

Przykład 6. Implikacje I_{GD}, I_{RC}, I_{DN} i I_{GG} spełniają prawa komutacji, ale infimum I_{GD} i I_{RC}

$$I(x,y) = (I_{GD} \wedge I_{RC})(x,y) = \begin{cases} 1 - x + xy, & x \leqslant y \\ y, & x > y \end{cases}, \qquad x, y \in [0,1]$$

nie spełnia tego prawa. Dla $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$, $z = \frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$I(x, I(y,z)) = I\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8} < \frac{29}{32} = I\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right) = I(y, I(x,z)).$$

Podobnie supremum I_{DN} i I_{GG}

$$I(x,y) = (I_{DN} \vee I_{GG})(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ \max(\frac{y}{x}, 1 - x), & x > y \end{cases}, \qquad x, y \in [0,1]$$

nie spełnia prawa komutacji. Dla $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$, $z = 0$ otrzymujemy

$$I(x, I(y,z)) = I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} < \frac{2}{3} = I\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = I(y, I(x,z)).$$

Kompletowanie spójników

- Generowanie negacji przez koniunkcje, alternatywy lub implikacje:
$N_C(x) = \sup\{y \in [0,1] : C(x,y) = 0\}$, $N_D(x) = \inf\{y \in [0,1] : D(x,y) = 1\}$,
$N_I(x,y) = I(x,0)$, $x \in [0,1]$.
- Generowanie koniunkcji przez negacje, alternatywy lub implikacje:
$C_I(x,y) = \inf\{t \in [0,1] : I(x,t) \geqslant y\}$, $C_{D,N}(x,y) = N(D(N(x),N(y)))$,
$C_{I,N}(x,y) = N(I(x,N(y)))$, $x,y \in [0,1]$.
- Generowanie alternatywy przez negacje, koniunkcje lub implikacje:
$D_I(x,y) = I(I(x,y),y)$, $D_{I,N}(x,y) = I(N(x),y)$,
$D_{C,N}(x,y) = N(C(N(x),N(y)))$, $x,y \in [0,1]$.
- Generowanie implikacji przez negacje, koniunkcje lub alternatywy:
$I_C(x,y) = \sup\{t \in [0,1] : C(x,t) \leqslant y\}$, $I_{C,N}(x,y) = N(C(x,N(y)))$,
$I_{D,N}(x,y) = D(N(x),y)$, $x,y \in [0,1]$.

W taki sposób powstały takie znane systemy logiki wielowartościowej jak Łukasiewicza ($C = T_{LK}, D = T_{LK}, I = I_{LK}, N = N_I$), Gödla ($C = T_M, D = S_M$, $I = I_{GD}, N = N_I$) czy iloczynowa ($C = T_P, D = S_P, I = I_{GG}, N = N_I$).

Generowanie rodzin spójników

Twierdzenie 10 (Baczyński, Jayaram 2008). *Niech* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *będzie bijekcją rosnącą oraz* $N : [0,1] \to [0,1]$ *będzie (ścisłą, silną) negacją rozmytą. Wówczas funkcja*

$$N_\varphi(x) = \varphi^{-1}(N(\varphi(x))),\ x, y \in [0,1]$$

jest (ścisłą, silną) negacją rozmytą.

Twierdzenie 11 (Klement i in. 2000). *Niech* $F : [0,1]^2 \to [0,1]$, $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *będzie bijekcją rosnącą oraz*

$$F_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}(F(\varphi(x), \varphi(y))),\ x, y \in [0,1].$$

Jeżeli F *jest koniunkcją rozmytą, półnormą, pseudonormą, normą trójkątną, alternatywą rozmytą, półkonormą, pseudokonormą, konormą trójkątną, to* F_φ *jest odpowiednio koniunkcją rozmytą, seminormą, normą trójkątną, alternatywą rozmytą, semikonormą, konormą trójkątną.*

Twierdzenie 12 (Baczyński, Jayaram 2008). *Niech* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *będzie bijekcją rosnącą oraz* $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *będzie implikacją rozmytą. Wówczas funkcja*

$$I_\varphi(x) = \varphi^{-1}(I(\varphi(x), \varphi(y))),\ x, y \in [0,1]$$

jest implikacją rozmytą.

Twierdzenie 13. *Każda średnia negacji rozmytych jest negacją rozmytą. Jeżeli średnia M jest silnie rosnąca względem obu zmiennych, a N_1 i N_2 są negacjami nieznikającymi (niewypełniającymi), to $M(N_1, N_2)$ jest negacją nieznikającą (niewypełniającą). Jeżeli średnia M jest ciągła i silnie rosnąca względem obu zmiennych, a N_1 i N_2 są negacjami ścisłymi, to $M(N_1, N_2)$ jest negacją ścisłą.*

Przykład 7. Średnia arytmetyczna nie zachowuje silnych negacji. Rozważmy negacje

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ 2(1-x), & \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}, \quad N_2(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ \frac{1-x}{2}, & \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}, \qquad x \in [0,1].$$

Dla średniej arytmetycznej otrzymujemy

$$M(x) = \frac{N_1(x) + N_2(x)}{2} = \begin{cases} 1 - \frac{5}{4}x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ \frac{3-x}{4}, & \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \\ \frac{5}{4}(1-x), & \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}, \qquad x \in [0,1],$$

gdzie $N(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$, $N(\frac{5}{8}) = \frac{19}{32} > \frac{1}{2}$, co oznacza, że negacja N nie jest inwolucją.

Twierdzenie 14. *Każda średnia koniunkcji rozmytych jest koniunkcją rozmytą (półnormą trójkątną, alternatywą rozmytą, półkonormą trójkątną).*

Twierdzenie 15. *Każda średnia implikacji rozmytych (implikacji rozmytych spełniających prawo kontrapozycji, identyczności, neutralności lub porządku) jest implikacją rozmytą (implikacją rozmytą spełniającą prawo kontrapozycji, identyczności, neutralności lub porządku).*

Literatura

- C. Alsina, E. Trillas, L. Valverde, On some logical connectives for fuzzy set theory, J. Math. Anal. Appl. 93 (1983) 15–26.
- M. Baczyński, B. Jayaram, Fuzzy Implications, Springer, Berlin 2008.
- J. Fodor, M. Roubens, Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support, Kluwer, Dordrecht 1994.
- E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular norms, Kluwer, Dordrecht 2000.
- J. Łukasiewicz, O logice trójwartościowej, Ruch Filozoficzny **5** (1920) 170–171.
- B. Schweizer, A. Sklar, Statistical metric spaces, Pacific J. Math. **10** (1960) 313–334.