Logika rozmyta typu 2

mgr inż. Maciej Świechowski
promotor: prof. dr hab. Jacek Mańdziuk

Wybrane zagadnienia

Plan prezentacji

- Wstęp – logika klasyczna
- Niepewność w logice
- Teoria logiki rozmytej
- Warianty LFS, IFS oraz IVFS
- **Logika rozmyta typu 2**
- Zastosowania
- Podsumowanie

Logika klasyczna

- Logika dwuwartościowa: {0,1}

PRAWDA lub FAŁSZ

- Zasada wyłączonego środka – dla dowolnego zdania **p** zachodzi:

$$p \vee \neg p = 1$$

$$p \wedge \neg p = 0$$

Logika klasyczna

- Operatory logiczne:

$\{0,1\}^N \to \{0,1\}$

- Na przykład:

p	q	p ⇒ q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

diagramy Venna, mapy Karnaugha

Krytyka logiki klasycznej

- Nie zawsze łatwo odpowiedzieć czy zdanie jest prawdziwe:

  "Olsztyn to duże miasto"

  "Apple to dobra firma"

- Brak modelowania informacji niepewnej
- Krytyka zasady wyłączonego środka
  - konieczna do zbudowania aparatu matematycznego, lecz prawdziwa tylko dla precyzyjnie zdefiniowanych symboli, a w praktyce wszystkie symbole są nieprecyzyjne (B. Russel)

Paradoks Bitwy Morskiej

- There will be a sea-battle tomorrow
- There will not be a sea-battle tomorrow

"It is necessary for there to be or not to be a sea-battle tomorrow; but it is not necessary for a sea-battle to take place tomorrow, nor for one not to take place.“

-**Arystoteles**

Paradoks stosu

- **Założenie 1:** Widząc ok. 200 000 ziarenek piasku, powiemy że tworzą stos piasku.

- **Założenie 2:** Kopiec bez jednego ziarenka nadal jest stosem.

Powtarzamy procedurę 200 000 razy…

- **Nie ma stosu**
- **Kiedy przestał nim być?**

[prawdopodobnie: Eubulides z Miletu lub Zenon z Elei]

Rodzaje niepewności

- Niepewność stochastyczna:

Np. rzut kostką, ryzyko ubezpieczenia

- Niepewność pomiarowa

Np. około 3cm, 20 stopni

- Niepewność informacyjna

Np. wiarygodny kredytobiorca, spełniający warunki

- Niepewność lingwistyczna

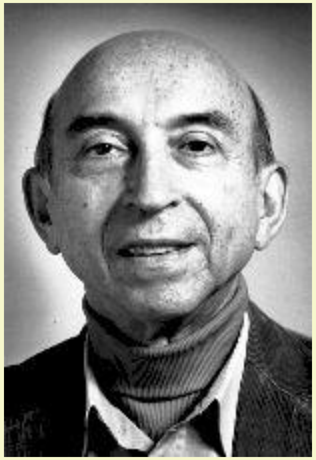
Np. szybki samochód, wysoki mężczyzna

Źródło: W.Duch

Logika rozmyta

- Przykład logiki wielowartościowej
  - *która dopuszcza więcej niż 2 wartości logiczne*

- Twórca: Lofti Zadeh
- Zbiory rozmyte (1965)



Zbiory rozmyte (Fuzzy Sets)

A = $\{(x, \mu_A(x)): x \in X\}$

Funkcja (charakterystyczna) przynależności:

$$\mu_A: X \to [0,1]$$

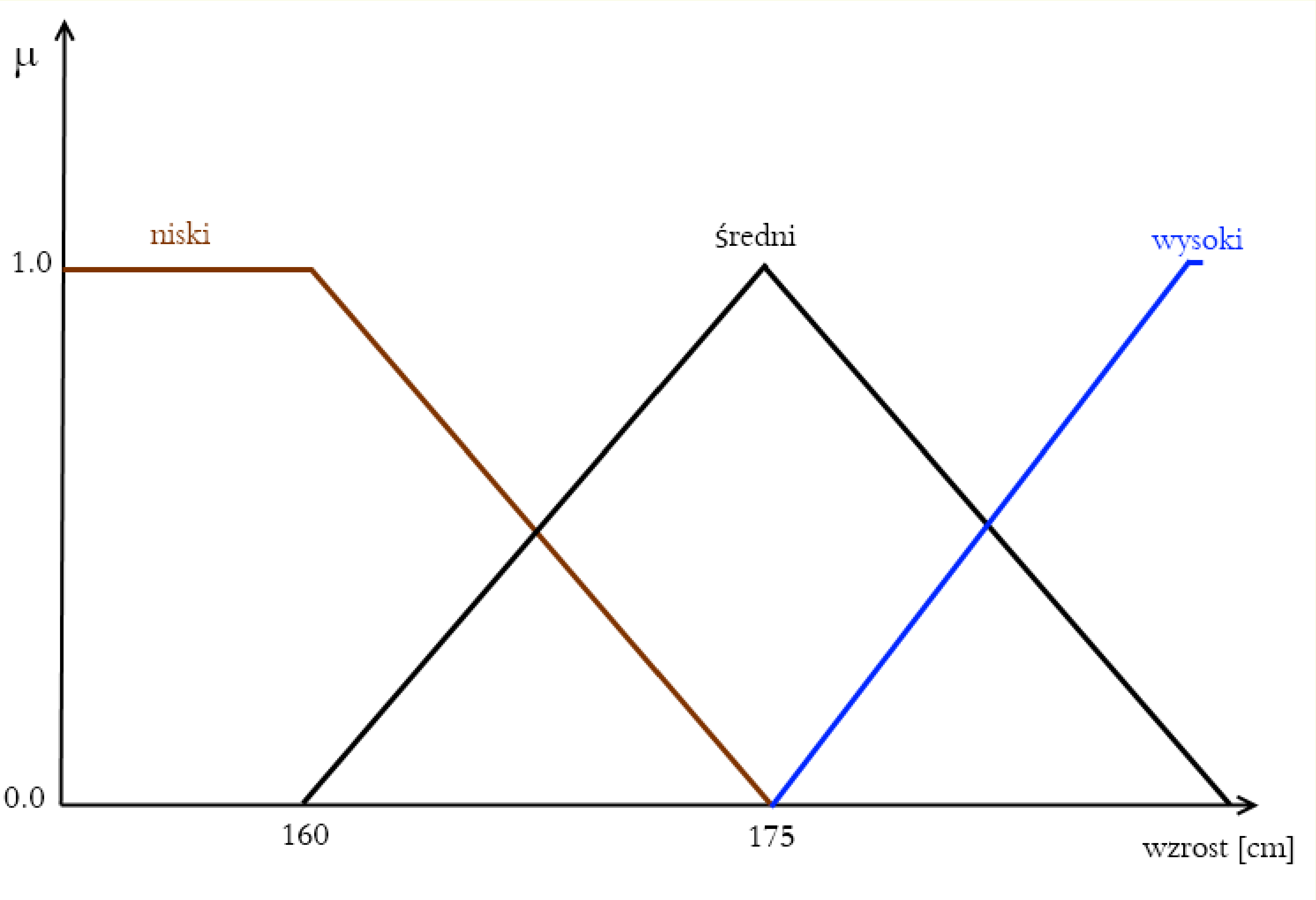
- Wartość logiczna = stopień przynależności do zbioru ***(fuzzy sets)***
- W klasycznej logice stopień przynależności to 0 lub 1 ***(crisp sets)***

Zbiory rozmyte (Fuzzy Sets)

- Stworzone z myślą o reprezentacji informacji niepewnej, subiektywnej lub przybliżonej.
- Podobne narzędzie do rachunku prawdopodobieństwa, lecz inna interpretacja
- Logika rozmyta uogólnia klasyczną logikę.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Zbiory rozmyte (Fuzzy Sets)



Zbiory rozmyte (Fuzzy Sets)

- Ponad 2000 publikacji w latach 1965-2000
- 9 840 000 wyników w google “fuzzy logic”
- 3146 wyników w DBLP “fuzzy logic”

- Dedykowane konferencje i czasopisma np. IEEE Journal of Fuzzy Systems, FuzzIEEE Conference

- Specjalne oprogramowanie np. Matlab Fuzzy Toolbox, MathWorks Fuzzy Inference System

Główne nurty badań:

- Postaci funkcji przynależności
- Relacje rozmyte
- Zastosowania

L-Fuzzy Sets

L-Fuzzy Sets

- 1967, Goguen
- Elementy kraty zupełnej

Częściowy porządek – relacja binarna:

- Zwrotna
- Przechodnia
- Antysymetryczna

Zbiór **L** częściowo uporządkowany – zbiór z relacją cz. up. na swoich elementach **(L,≤)**

L-Fuzzy Sets

Krata zupełna:

Zbiór cz.-up., w którym dla każdego podzbioru $L' \in L$ istnieją kresy dolny i górny: $\forall_{L' \in L}\, L \neq \emptyset \rightarrow \left(\exists_{inf L'} \wedge \exists_{sup L'}\right)$

Zbiór L-rozmyty:

Niech (L, ≤) – krata zupełna. Zbiór L-rozmyty A:

$$A \overset{\text{def}}{=} \{\left(x, \mu_A(x)\right): x \in X\}$$

gdzie $\mu_A: X \rightarrow L$ – funkcja przynależności A.

Przykład: przedział [0,1] i relacja ≤.

L-Fuzzy Sets

Nośnik (support):

$$S_A = \{x \in X |\, \mu_A(x) > 0\}$$

Jądro (kernel):

$$K_A = \{x \in X |\, \mu_A(x) = 1\}$$

Wysokość (height):

$$H_A = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ –odcięcie ($\boldsymbol{\alpha - cut}$)

$$A_\alpha = \{x \in X |\, \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

Zbiór jest normalny, jeśli:

$$H_A = 1,\ \mu_{A_N}(x) = \frac{\mu_A(x)}{H_A}$$

L-Fuzzy Sets

Suma, iloczyn oraz dopełnienie zbiorów L-rozmytych są również zbiorami L-rozmytymi.

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{A \cap B}(x) = \inf\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{A \cup B}(x) = \sup\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

N- unarny operator odwracający relację ≤ na L

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{A^C}(x) = N\mu_A(x)$$

Dla zbiorów z (inf ≡ min, sup ≡ max):

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Intuitionistic Fuzzy Sets

I-Fuzzy Sets

- **Intuitionistic Fuzzy Sets**
- **Intuicjonistyczne zbiory rozmyte**
- **Zbiory rozmyte Atanassova**

(mimo takiej nazwy - mały związek z intuicją)

Dodanie funkcji nieprzynależności:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \mu_A(x), \upsilon_A(x)) \colon x \in X\}$$

Gdzie:

$\mu_A(x) \colon X \to [0,1]$ – funkcja przynależności

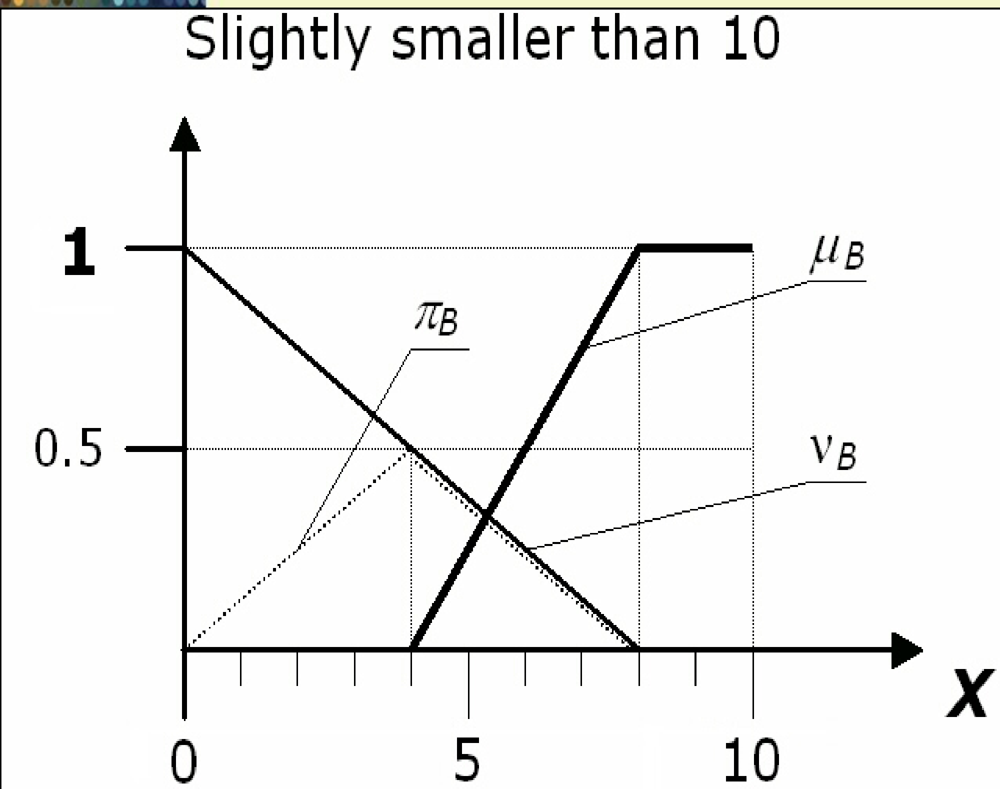
$\upsilon_A(x) \colon X \to [0,1]$ – funkcja nieprzynależności

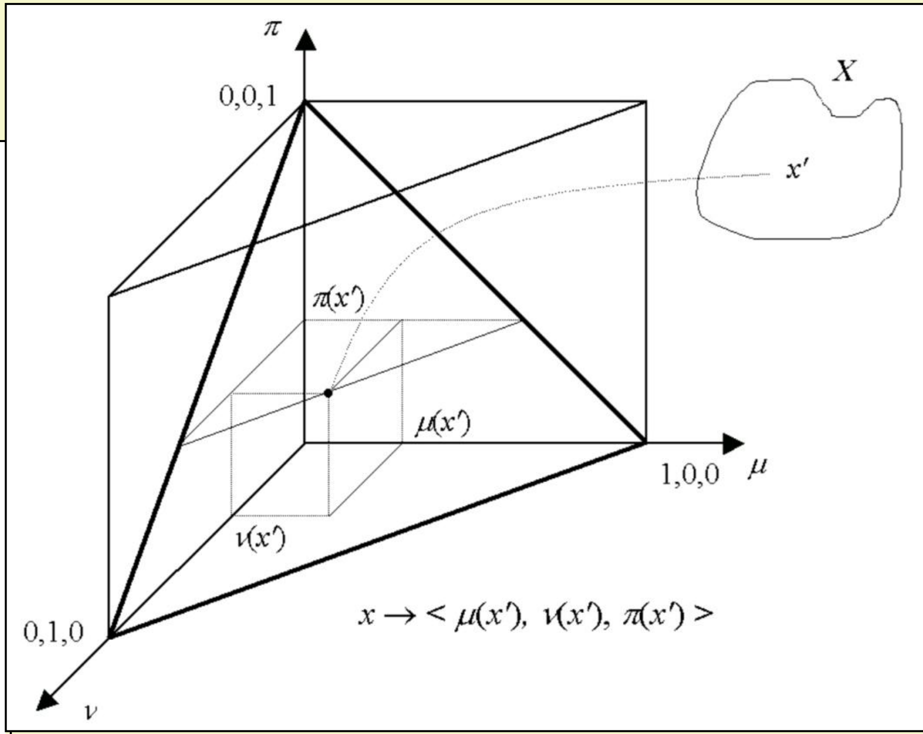
$$\bigvee_{x \in X} 0 \leq \mu_A(x) + \upsilon_A(x) \leq 1$$

I-Fuzzy Sets

Rozmyty indeks intuicjonistyczny (margines wahania)

$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \upsilon_A(x)$





[Źródło:
A.Niewiadomski, Politechnika Łódzka]

I-Fuzzy Sets

Wprowadzają dodatkowy stopień swobody. Właściwy np. do modelowania ludzkiego niezdecydowania w grupowym podejmowaniu decyzji [J.Kacprzyk].

Sprowadzają się do klasycznych zbiorów rozmytych, gdy:

$$A = \{\left(x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\right): x \in X\}$$

Szczególnie warto stosować, gdy:

- Istnieje jawna wieloznaczność interpretacji w modelu (nie tylko nieprecyzyjność lingwistyczna). Np. pochodzenie śladów na miejscu zbrodni.
- Istnieje element wahania np. wstrzymywanie się od głosu w głosowaniach

I-Fuzzy Sets

Zawieranie i równość:

$A \subset B \Leftrightarrow \{\forall_{x \in X}(\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \wedge \upsilon_A(x) \geq \upsilon_B(x))\}$

$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Operator „box" (konieczność):

$\Box A \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, \mu_A(x)\rangle : \mathrm{x} \in X\}$

Operator „diamond" (możliwość):

$\Diamond A \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, 1 - \upsilon_A(x)\rangle : \mathrm{x} \in X\}$

Operatory znane z **logik modalnych**.

$\Box A$ oraz $\Diamond A$ są zbiorami rozmytymi.

I-Fuzzy Sets

Moc konieczna i możliwa:

$card_{nec}(A) = card(\Box\, A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$

$card_{pos}(A) = card(\lozenge\, A) = \sum_{x \in X} (1 - \upsilon_A(x))$

Entropia:

$E(A) = \sum_{x \in X} \pi_A(x)$

Suma i iloczyn (przykładowa, kanoniczna):

$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} (x, \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\upsilon_A(x), \upsilon_B(x)\})$

$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} (x, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\upsilon_A(x), \upsilon_B(x)\})$

Interval-Valued Fuzzy Sets

IV Fuzzy Sets

- **Interval-valued fuzzy sets**
- **Przedziałowe zbiory rozmyte**

- **Zaproponowane niezależnie:**

Zadeh, Grattan-Guiness, Jahn, Sambuc

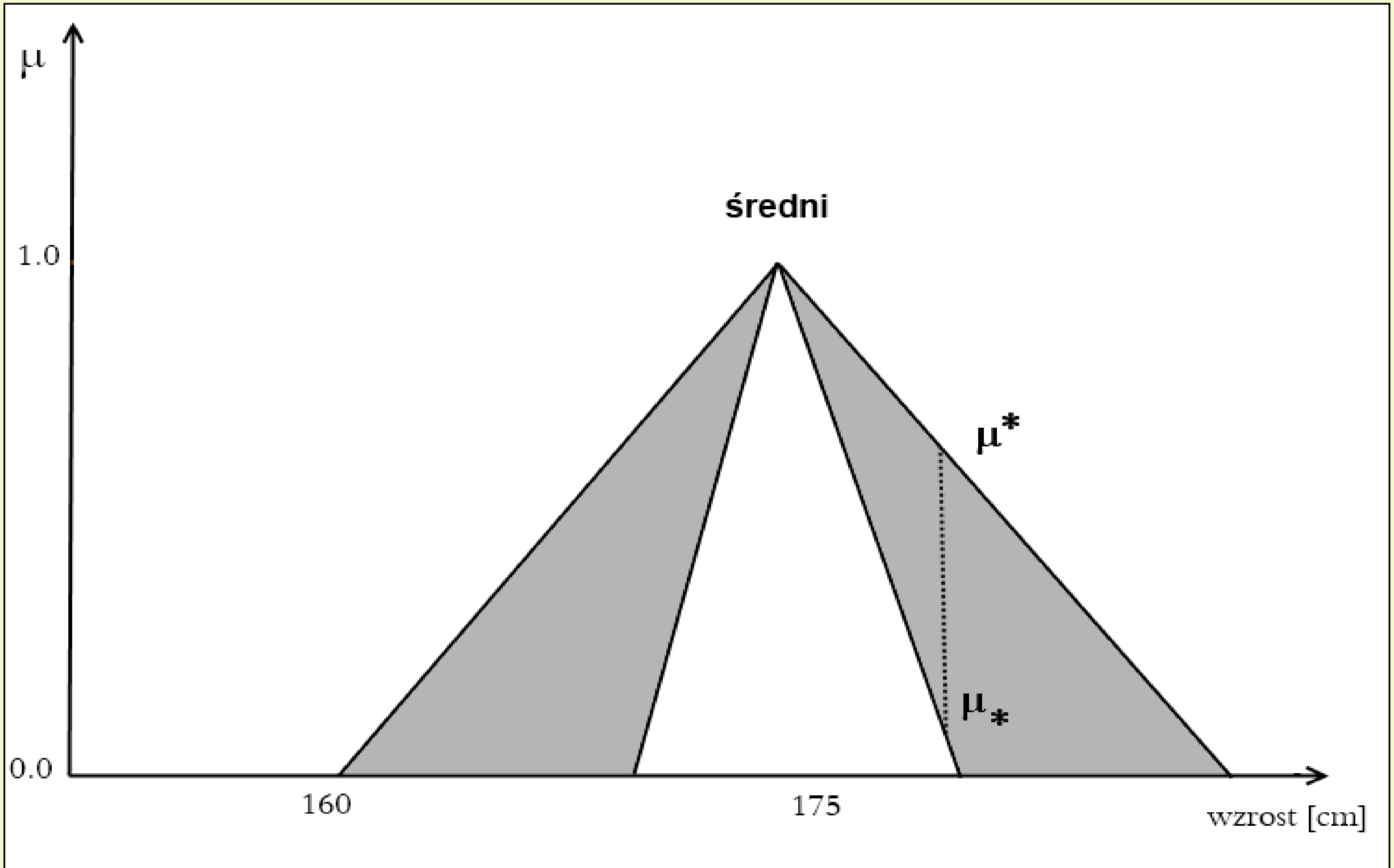
Dwie funkcje przynależności:

- dolna i górna

Stopień przynależności nie jest liczbą, a przedziałem w [0,1].

IV Fuzzy Sets

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\left(x, \underline{\mu_A(x)}, \overline{\mu_A(x)}\right) : x \in X\right\} \stackrel{\text{def}}{=} (\underline{A}, \overline{A})$$



IV Fuzzy Sets

Zaproponowane jako nowe narzędzie

- bez konkretnej motywacji w oryginalnych pracach

W przeciwieństwie do IFS nie ma wymogu zależności: **przynależność-nieprzynależność**

IFS można stosować na przykład, gdy informacja niepewna wynika z dwóch, niezależnych kryteriów.

Np.

- Adam Smith jest w 0.5 Polakiem (po ojcu)
- Adam Smith nie jest w 0.95 Polakiem (prawie nie mówi po polsku)

Arytymetyka przedziałów

Niech $\boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$, $b = [\underline{b}, \overline{b}]$ - przedziały w $\Re$, r $r \in \Re_+$

$$[\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$$

$$[\underline{a}, \overline{a}] - [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]$$

$$[\underline{a}, \overline{a}] * [\underline{b}, \overline{b}] = [min\{\underline{ab}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, max\{\underline{ab}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$$

$$[\underline{a}, \overline{a}] : [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a}, \overline{a}] * \left[\frac{1}{\underline{b}}, \frac{1}{\overline{b}}\right], \overline{b}, \underline{b} \neq 0$$

$$[\underline{a}, \overline{a}]^r + [\underline{a^r}, \overline{a^r}] = \overline{a}, \underline{a} \geq 0$$

[Moore, Lodwick],[Sengupta, Pal, Chakraborty]

Relacje dla IVFS

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\mu}_{A \cap B}(x) \wedge \underline{\mu}_{A \cap B}(x)$$

$$= \min\{\underline{\mu}_A(x), \underline{\mu}_B(x)\} \wedge \min\{\overline{\mu}_A(x), \overline{\mu}_B(x)\}$$

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mu}_{A \cup B}(x) \wedge \overline{\mu}_{A \cup B}\ (x)$$

$$= max\left\{\underline{\mu}_A(x), \underline{\mu}_B(x)\right\} \wedge \max\{\overline{\mu}_A(x), \overline{\mu}_B(x)\}$$

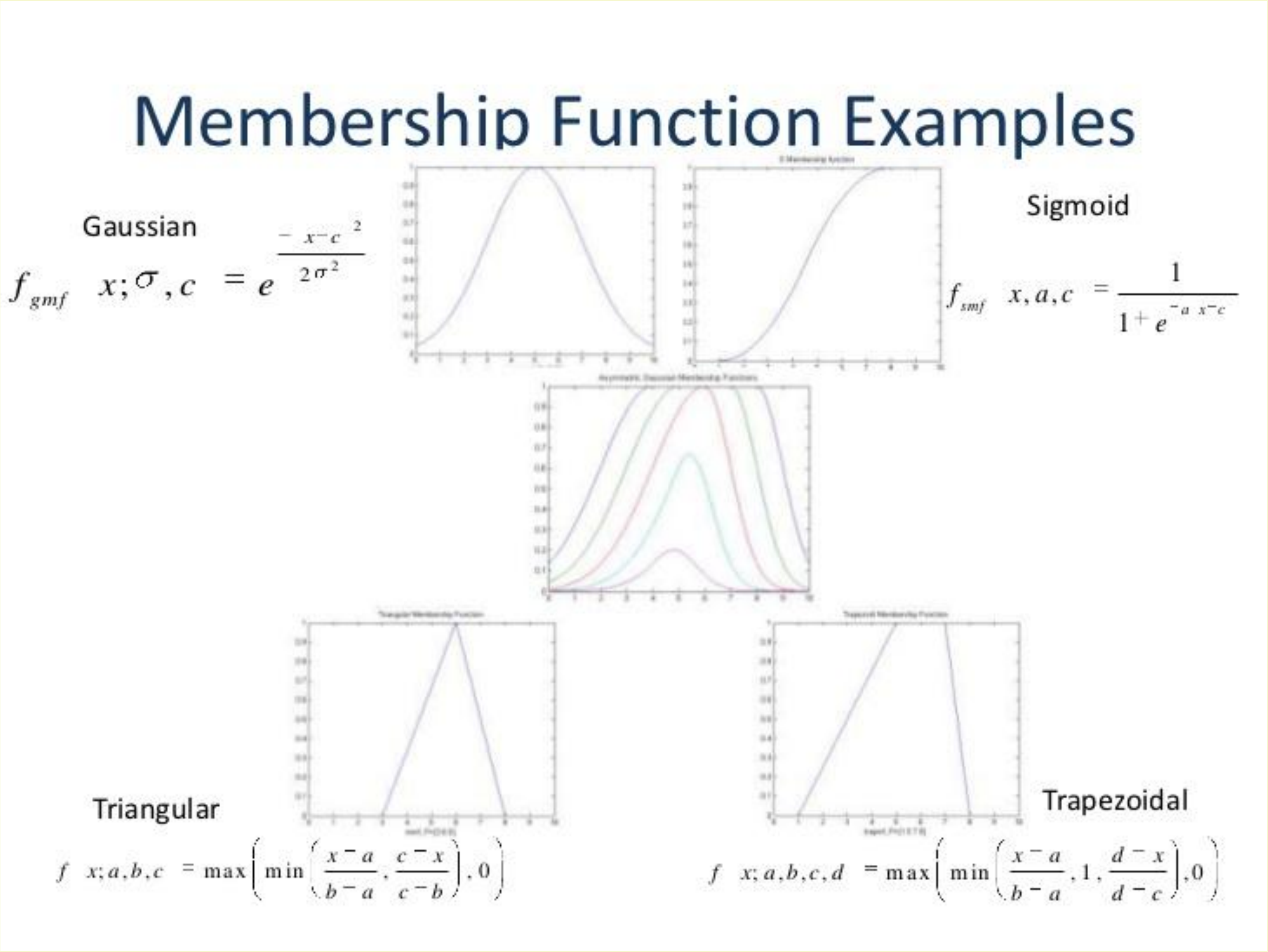
$$\boldsymbol{A^c} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\left\langle x, 1 - \overline{\mu}_A(x), 1 - \underline{\mu}_A(x)\right\rangle : x \in X\right\}$$

Zbiory rozmyte

Popularne funkcje przynależności

- **Funkcja trójkątna**
- **Funkcja trapezoidalna**
- **Funkcja kapeluszowa**
- **Parabola**
- **Funkcja Gaussa**
- **Funkcje opisujące gęstość prawdopodobieństwa**
- **S-funkcje**
- **P-funkcje**
- **Kawałkami powyższe**
- **Heurystyki**
- **Funkcje dobierane adaptacyjne (np. ewolucyjnie)**

Popularne funkcje przynależności



Źródło: Rafi Steinberg

Zachowanie podstawowych własności

[Źródło: G. J. Klir, B. Yuan]

TABLE 1.1 FUNDAMENTAL PROPERTIES OF CRISP SET OPERATIONS

Involution	$\overline{\overline{A}} = A$
Commutativity	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Associativity	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivity	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotence	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$
Absorption by X and $\varnothing$	$A \cup X = X$
	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Identity	$A \cup \varnothing = A$
	$A \cap X = A$
Law of contradiction	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Law of excluded middle	$A \cup \overline{A} = X$
De Morgan's laws	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Logika rozmyta typu 2
Zbiory rozmyte typu 2

Logika rozmyta typu 2

- **Typ 1**: rozmyta zmienna logiczna
- **Typ 1**: funkcja przynależności modeluje niepewność zmiennej logicznej, ale nie modeluje różnych typów niepewności
- **Typ 1**: z natury opisu niepewność zwykle uzależniona jest od jednego parametru – np. *wysoki* mężczyzna

Logika rozmyta typu 2

Typ 2:

rozmycie zmiennej logicznej + rozmycie funkcji przynależności

Przykład interpretacji:

ciekawy film

- **Nie wiemy jak ciekawy**
- **Nie wiemy co dokładnie oznacza ‘ciekawy’**

Logika rozmyta typu 2

Informacja niepewna + miara niepewności = Informacja użyteczna

Logika rozmyta typu 2

Typ 1:

$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ $\mu_A : X \to [0,1]$

Typ 2:

$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\}$ $\mu_{\tilde{A}} : X \to \mathcal{F}([0,1])$

Funkcja $\mu_{\tilde{A}}$ przypisuje elementom X zbiory rozmyte w przedziale [0,1].

Logika rozmyta typu 2

Zbiory rozmyte typu 2 można również zdefiniować:

$\tilde{A} = \left\{ (x, \int_{u \in J_x} \frac{\mu_x(u)}{u}) : x \in X \right\}$ lub $\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x,u)}{(x,u)}$

$J_x \subseteq [0,1]$

Zbiory rozmyte typu 2 mają postać trójwymiarową - osie:

{x, u, μ (x,u)}

$\iint$ oznacza sumowanie w odpowiedniej algebrze po wszystkich dopuszczonych x i u. Dla dyskretnych dziedzin $\int$ zamienia się na $\sum$

Logika rozmyta typu 2

Pewna analogia:

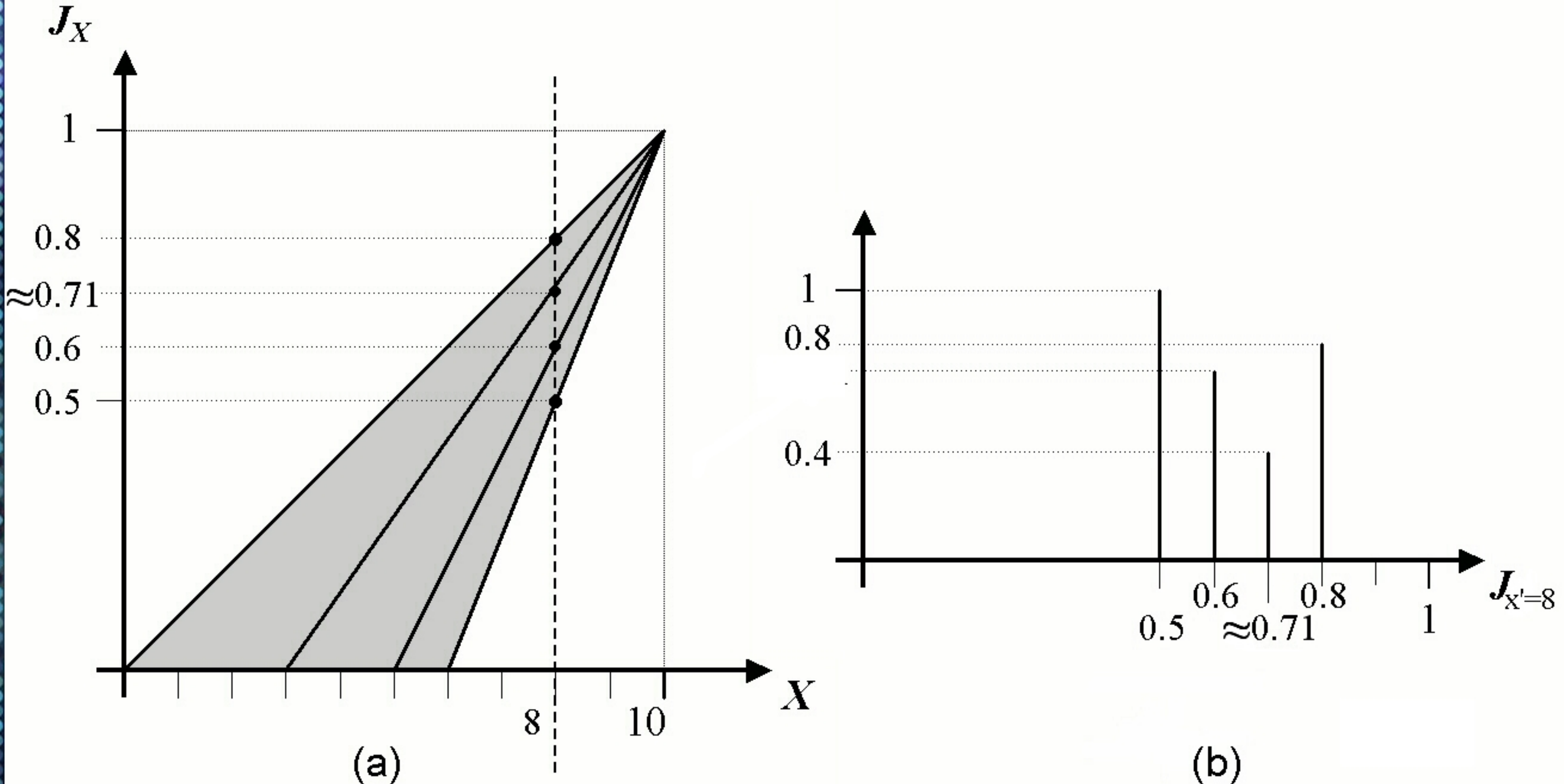
Moment (zwykły, centralny) zmienej losowej rzędu 1 lub 2

- drugi moment opisuje dodatkowo pierwszy

Zbiory rozmyte typu 2 zawierają L-FS, IFS oraz IVFS jako szczególne przypadki.

Matematycy mogą teraz zdefiniować logikę rozmytą typu N, która nie doczekała się żadnego praktycznego zastosowania dla N > 2.

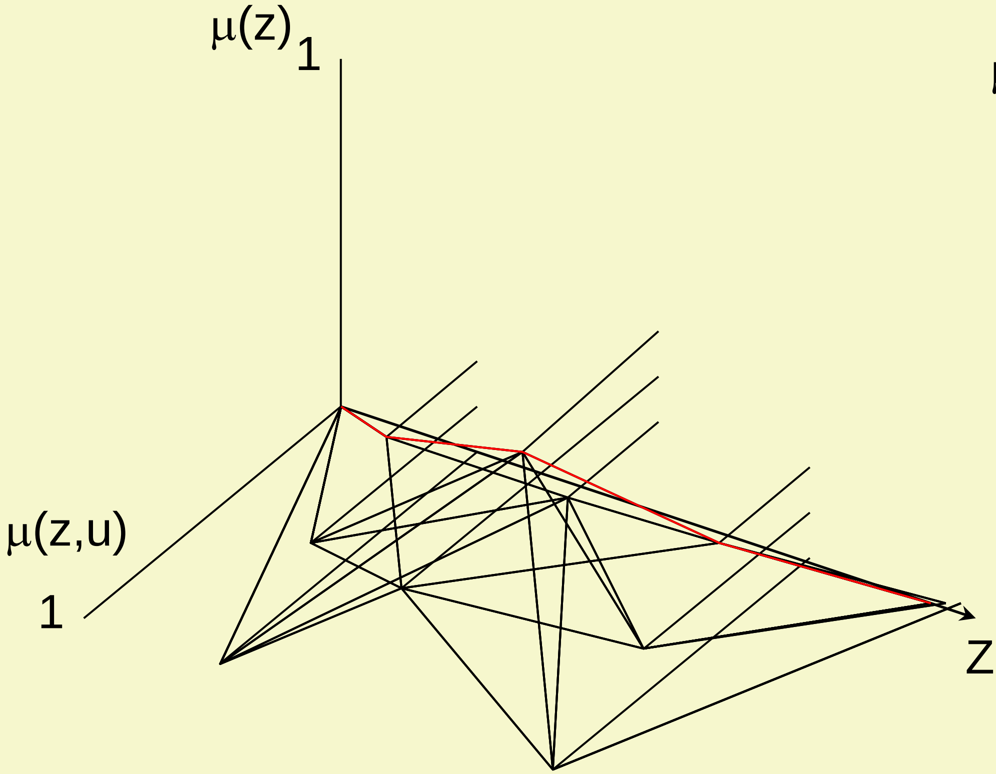
Wizualizacja 1/3

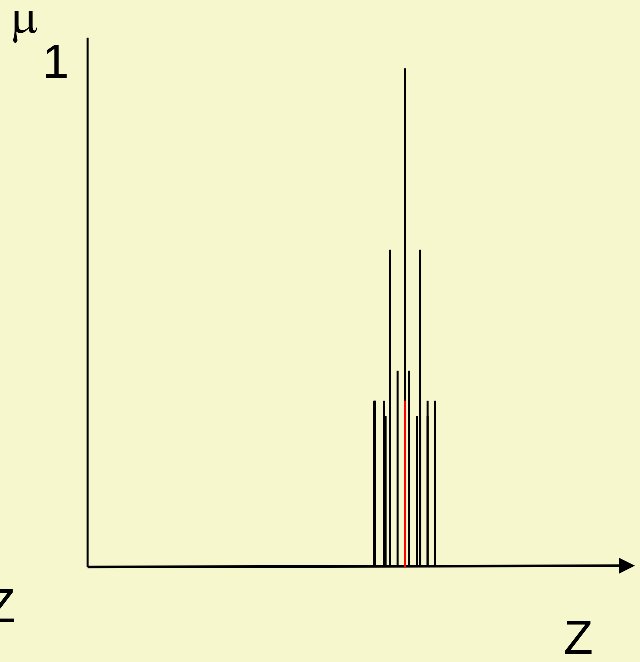


(a)

(b)

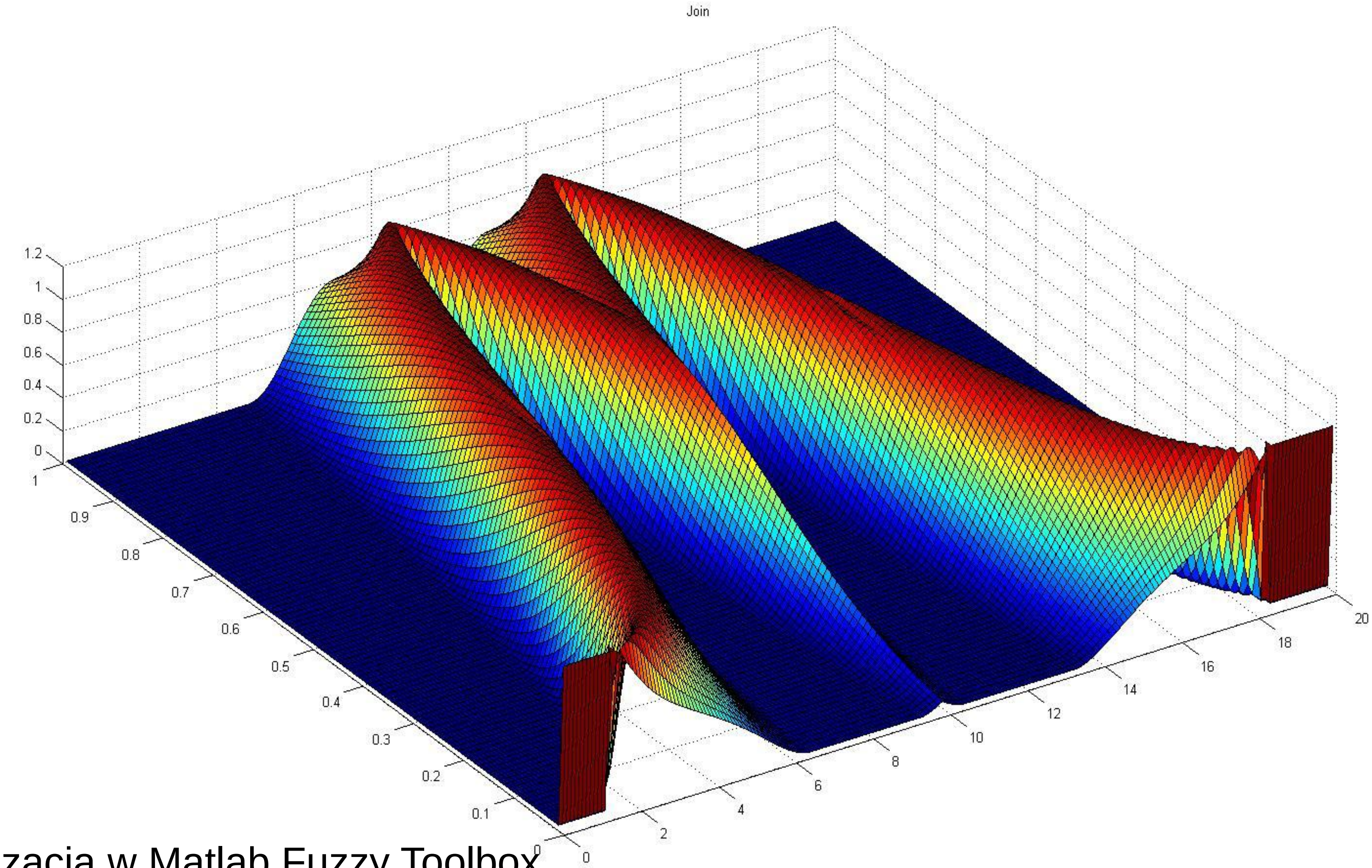
Wizualizacja 2/3





[Źródło: Dr Simon Coupland]

Wizualizacja 3/3



[Wizualizacja w Matlab Fuzzy Toolbox,
http://mhrg.if.uidaho.edu/images/fuzzy2/Join_3D_L.jpg]

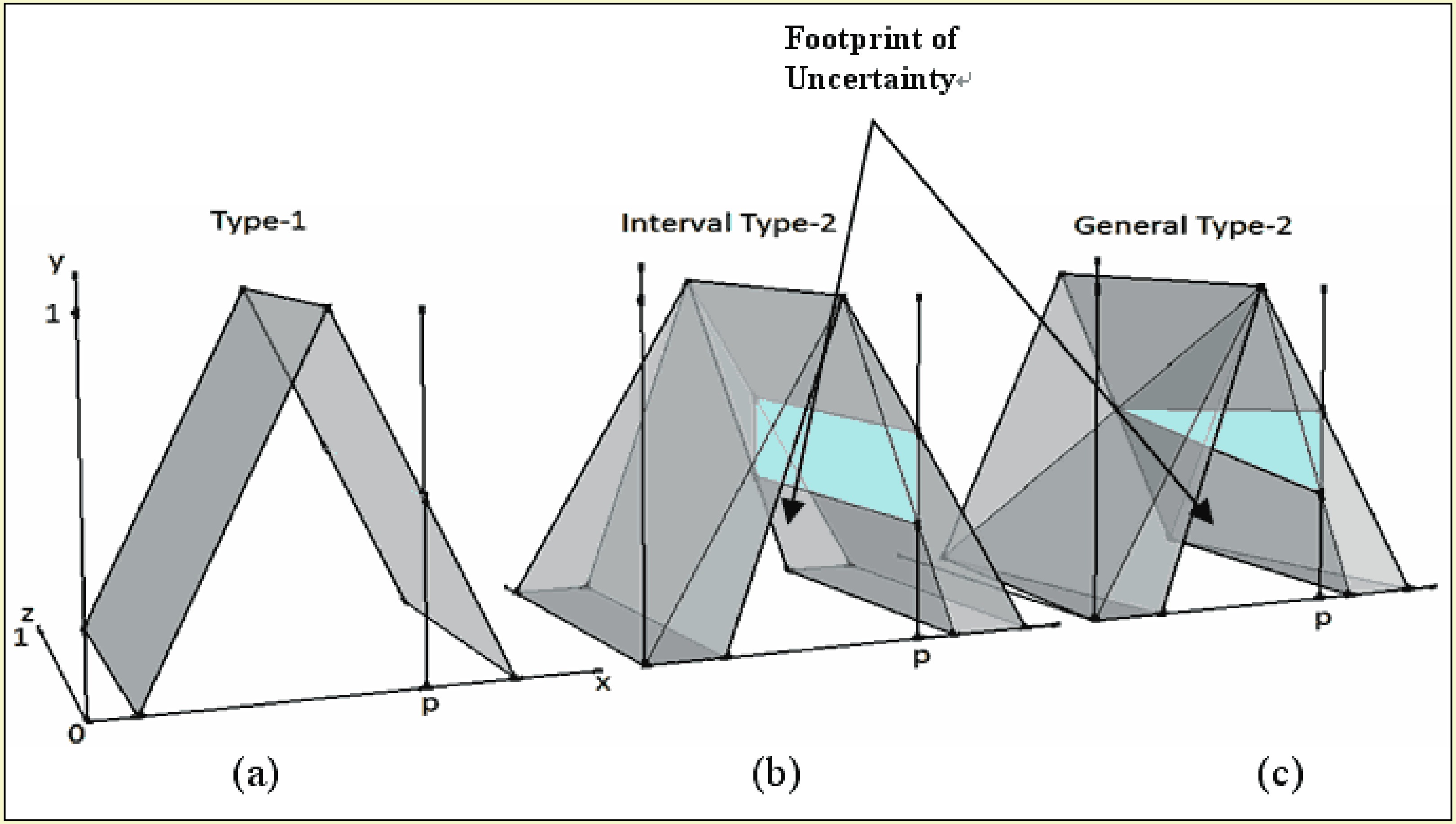
Zbiory rozmyte typu 2

FOU – footprint of uncertainty

$$\{\langle x, u\rangle : x \epsilon X, u \in J_x, \mu_x(u) > 0\}$$

z

Zbiory rozmyte typu 2



[http://www.my-smc.org/news/back/2009_06/images/hagras_photo1.gif]

Logika rozmyta typu 2

Suma

- Operator JOIN
- Nazwa zainspirowana językiem angielskim
- Połączenie dwóch cech
  - Obie cechy można odnaleźć w jednym obiekcie

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcup \mu_{\tilde{B}}(x)$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \frac{\int_{u \in J_x} \int_{w \in I_x} (\mu_A(u) \cup \mu_B(w))}{u \vee w}$$

Logika rozmyta typu 2

Iloczyn

- Operator MEET
- Nazwa zainspirowana językiem angielskim
- Spotkanie się dwóch cech
  - Znalezienie punktów wspólnych, w których cechy się ‘spotykają’

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcap \mu_{\tilde{B}}(x)$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \frac{\int_{u \in J_x} \int_{w \in I_x} (\mu_A(u) \cap \mu_B(w))}{u \wedge w}$$

Logika rozmyta typu 2

Iloczyn

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcap \mu_{\tilde{B}}(x)$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \frac{\int_{u \in J_x} \int_{w \in I_x} (\mu_A(u) \cap \mu_B(w))}{u \wedge w}$$

Dopełnienie

- Operator NOT

$$\tilde{A}^c = \frac{\int_{u \in J_x} (u)}{1 - u}$$

Logika rozmyta typu 2

Liczby kardynalne zbiorów rozmytych:

$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \sup\{u \in J_x : \mu_x(u) = 1\}$

czyli:

- przecinamy zbiór płaszczyzną $\mu_x(u) = 1$
- znajdujemy supremum wewnętrznej funkcji rozmytej
- sumujemy po x (elementach, którym przydzielamy wartość logiczną)

$|\tilde{A}| = \frac{1}{2}\sum_{x \in X}(LMF_{\tilde{A}} + UMF_{\tilde{A}})$ (dla IVT2FS)

Liczba kardynalna z alfa-odcięciem:

$$|\tilde{A}|_{\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{x \in X}(\inf\{u \in J_x : \mu_x(u) > \alpha\} + \sup\{u \in J_x : \mu_x(u) > \alpha\})$$

Logika rozmyta typu 2

Inne, przykładowe pojęcia:

- Potęga zbioru rozmytego
- Miary podpobieństwa
- Wyrażenia kwantyfikowalne
  - *TGQ (Barwise, Cooper: 30 rodzajów kwantyfikatorów)*
  - *Q x'ów jest S1*
  - *Q x'ów, które są S2 jest S1*
- Wypukłość
- T-normy i S-normy

Logika rozmyta typu 2

T-normy

- **Uogólniają iloczyn (przecięcie) zbiorów**

S-normy

- **Uogólniają sumę (unię) zbiorów**

Elastyczność w definiowaniu t-norm i s-norm (wystarczy zachować podstawowe własności) – żeby dopasować operacje na zbiorach rozmytych do konkretnego zagadnienia.

Logika rozmyta typu 2

T-normy

$$\Delta : [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \boldsymbol{x} [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$$

- $\mathbf{1} \, \Delta \, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
- $\mathbf{0} \, \Delta \, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
- $\boldsymbol{x} \, \Delta \, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \, \Delta \, \boldsymbol{x}$
- $(\boldsymbol{x} \, \Delta \, \boldsymbol{y}) \Delta \, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \, \Delta \, (\boldsymbol{y} \, \Delta \, \boldsymbol{z})$
- $\boldsymbol{x} \, \Delta \, (\boldsymbol{y} \, \Delta \, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \, \Delta \, \boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{x} \, \Delta \, \boldsymbol{z})$
- $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z} \Rightarrow (\boldsymbol{x} \, \Delta \, \boldsymbol{y}) \leq (\boldsymbol{w} \, \Delta \, \boldsymbol{z})$

Logika rozmyta typu 2

S-normy

- T-konormy
- Generalizacja sumy dla zbiorów rozmytych

$$\nabla: [0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$$

- $1 \nabla x = 1 \;, \quad 0 \nabla x = x$
- $x \nabla y = y \nabla x$
- $(x \nabla y) \nabla z = x \nabla (y \nabla z)$
- $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \vee (x \nabla z)$
- $x \leq w \wedge y \leq z \Rightarrow (x \nabla y) \leq (w \nabla z)$

Logika rozmyta typu 2

S-normy

- **są dualne do t-norm**

$$\boldsymbol{x \,\Delta\, y = T(x,y)}$$

$$\boldsymbol{x \,\nabla\, y = S(x,y)}$$

$$\bigvee_{x,y} \boldsymbol{T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y)}$$

$$\boldsymbol{T(x,y) \leq min(x,y) \leq max(x,y) \leq S(x,y)}$$

Popularne t-normy

- **Norma minimum:**

$$\boldsymbol{T(A,B) = min(A,B)}$$

- **Drastyczne minimum:**

$$\boldsymbol{T(A,B) = \begin{cases} min(A,B)\ , max(A,B) = 1 \\ \quad\quad 0, \quad\quad\quad w\ p.p. \end{cases}}$$

- **Norma Łukasiewicza:**

$$\boldsymbol{T(A,B) = max(A+B-1,0)}$$

- **Iloczyn algebraiczny:**

$$\boldsymbol{T(A,B) = A * B}$$

Popularne t-normy

- **Iloczyn Einsteina:**

$$\boldsymbol{T(A,B) = \frac{A * B}{2 - [A + B - A * B]}}$$

- **Iloczyn Hamachera:**

$$\boldsymbol{T(A,B) = \frac{A * B}{A + B - A * B}}$$

- **Norma Yagera z parametrem *p*:**

$$\boldsymbol{T(A,B) = max(0, 1 - \sqrt[p]{(1 - A)^p + (1 - B)^p}}$$

- **Norma Aczél-Alsina z parametrem *p*:**

$$\boldsymbol{T\,(A,B) = e^{-\left(\sqrt[p]{|\log A|^p + |\log B|^p}\right)}}$$

$$0 < p < \infty$$

Zastosowania

Zastosowania

- Systemy ekspertowe z rozmytymi regułami
- Sterowniki rozmyte
- Systemy neuronowo-rozmyte (neuro-fuzzy)
- Rozmyte algorytmy genetyczne
- **Przetwarzanie języka naturalnego**
  - Podsumowania baz danych
  - Reprezentacja informacji lingwistycznej & komputerowa analiza tekstu
  - Boty rozmawiające
  - Automatyczne sprawdzanie testów językowych
  - Ontologie
- Przetwarzanie obrazów
- Agregowanie i kompresja formuł logicznych

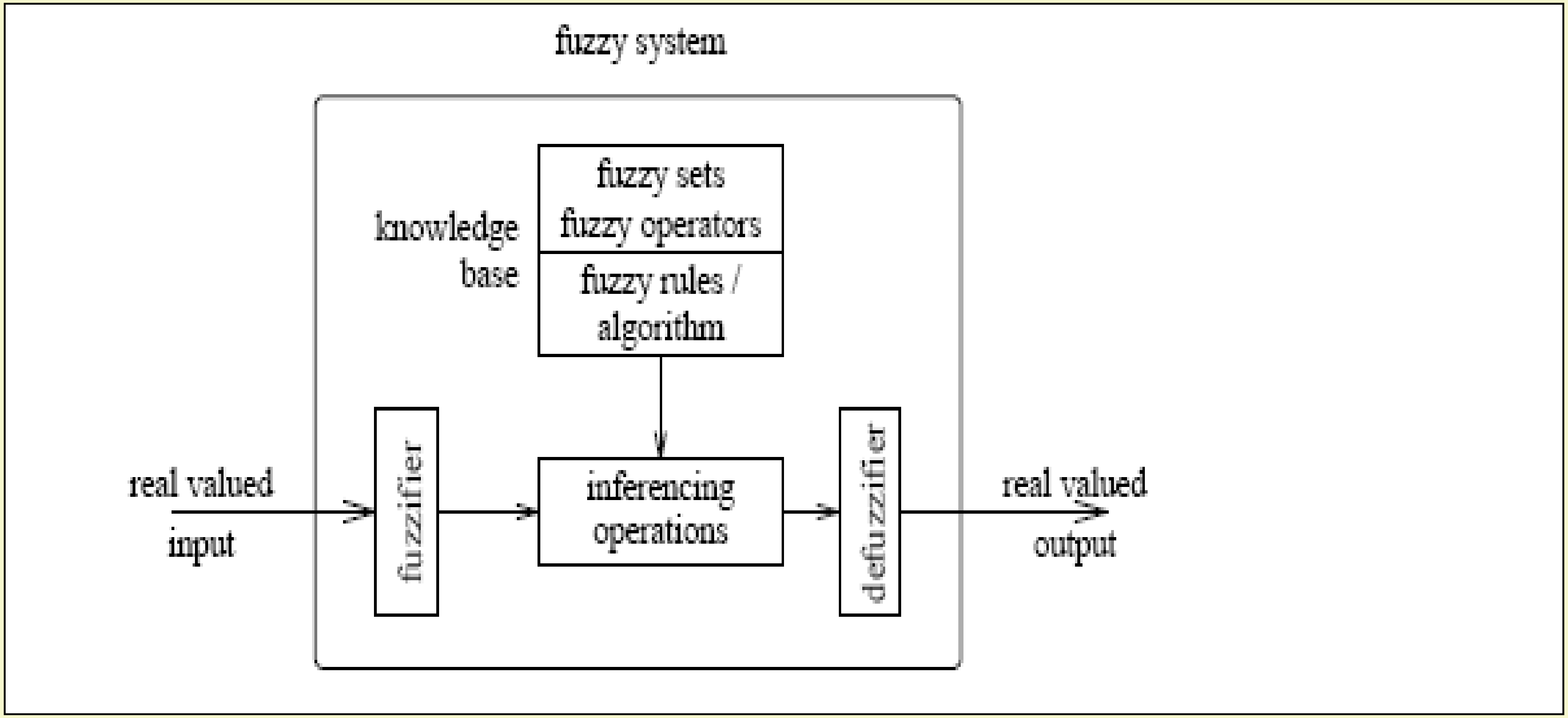
Zastosowania

- Systemy ekspertowe z rozmytymi regułami
  - Medycyna, diagnozy medyczne (wspomagające lekarzy)
  - Ekonomia, giełda
  - Poszukiwania geologiczne
  - Prognoza pogody
  - Polityka
  - E-Learning
  - Przewidywanie i optymalizacja efektów grupowego podejmowania decyzji
  - I inne…

Zastosowania

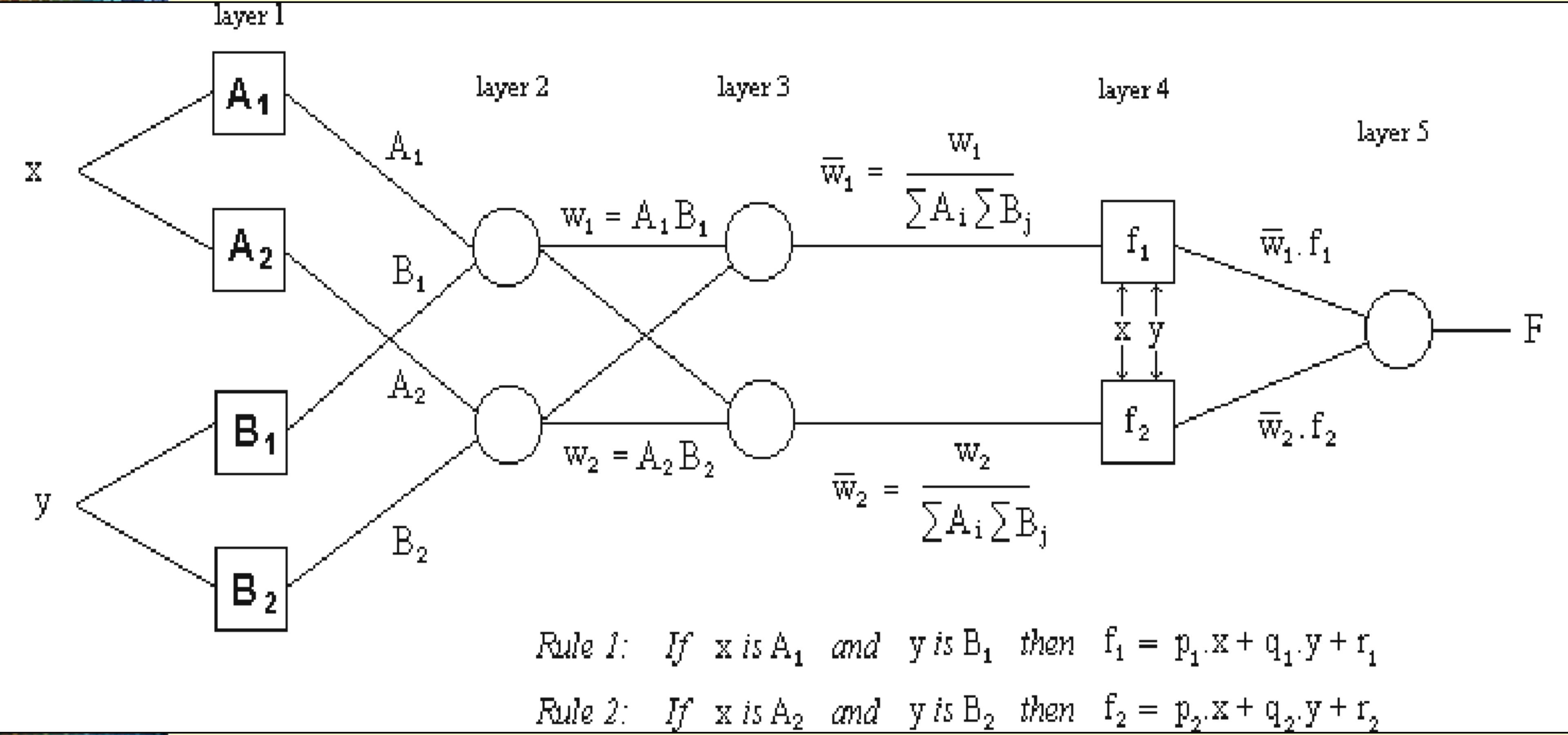
- Oprogramowanie metra w Sendai, Japonia
- Siemens – posiada dział “fuzzy logic”
- Silniki MAN 9000kW
- System wentylacji i klimatyzacji HVAC
- Płytki PLC (Programmable Logic Controller) np. Moeller
- Program MASSIVE 3D, użyty m.in. przy produkcji Władcy Pierścieni
- W motoryzacji: ABS i automatyczne skrzynie biegów
- IBS PAN ☺ - jeden z wiodących tematów, wiele projektów
- Windy, Odkurzacze, Kamery
- Wiele zastosowań przemysłowych – głównie w zakresie kontroli procesów

System rozmyty - schemat



[M.Brown – An introduction to fuzzy and neurofuzzy systems.]

System neuro-rozmyty - schemat



[Rashid et. al. – from COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering

Sterownik Takagi-Sugeno

- Posiada bazę reguł. Postać k-tej reguły wygląda tak:

$R^{(k)}$:IF (x1 jest ${A_1}^{(k)}$) AND ... (xn jest${A_n}^{(k)}$) THEN

$y_n = f^{(k)}(\mathrm{x1}, \dots, \mathrm{xn})$, gdzie y_n jest funkcją wyjścia

Wyjście systemu $\overline{y} = \frac{\sum_{k=1}^{N}(w^k * y_n)}{\sum_{k=1}^{N} w^k}$

$$w^k = \begin{cases} \min(\mu_{{A_1}^{(k)}}(x1), \dots, \mu_{{A_n}^{(k)}}(xn)) \\ lub \\ \prod_{i=1}^{n} \mu_{{A_i}^{(k)}}(xi) \end{cases}$$

Podsumowanie

- **Logika rozmyta i zbiory rozmyte uznawane są za jedno z największych osiągnięć matematyki/informatyki lat 1950-2000**

- **Uniwersalne narzędzie**
- **Szeroko stosowane przez naukowców**
- **Tylko narzędzie:**

“not a panacea, good science is still the key’”[S. Coupland]

- **Zbiory rozmyte typu 2 – wciąż słabo zbadane i wykorzystywane.**
  - **problemem jest m.in. wysoka złożoność obliczeniowa**