

Prof. dr hab. Paweł Strzelecki
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa, Polska
e-mail: pawelst@mimuw.edu.pl

Warszawa, 7 listopada 2016

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgra Michała Gaczkowskiego

Rozprawa doktorska *Przestrzenie Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem na rozmaitościach riemannowskich* Pana Michała Gaczkowskiego, napisana pod opieką prof. Krzysztofa Chełmińskiego i dra Przemysława Górki, jest poświęcona – zgodnie z tytułem – badaniu przestrzeni Sobolewa takich funkcji, których pochodne są całkowalne ze zmiennym (zależnym od punktu) wykładnikiem. Dziedziną rozpatrywanych funkcji jest (niekoniecznie zwarta) rozmaitość riemannowska zupełna, pozbawiona brzegu. W ostatnim rozdziale autor pokazuje zastosowania przestrzeni Sobolewa do zagadnień związanych z równaniami cząstkowymi drugiego rzędu z tzw. $p(x)$ -laplasjanem.

Tematyka przestrzeni Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem, a także równań z $p(x)$ -laplasjanem, jest w ostatnich kilkunastu latach bardzo intensywnie badana. Część (spośród olbrzymiej liczby) prac, które się ukazują w tej tematyce, ma *de facto* charakter drobnych, technicznych przyczynków. Najbardziej problematyczną częścią oceny było dla mnie jasne stwierdzenie, które części rozprawy są istotnie nowe, które zaś zostały przez Autora umieszczone w tekście wyłącznie dla pełności prezentacji. Więcej piszę na ten temat niżej.

Rozprawa należy do stosunkowo obszernych, jak na matematykę (113 stron, 47 pozycji w bibliografii). Obszerny Rozdział 1 ma charakter wprowadzający; wydaje się, że można go było istotnie skrócić, podając staranne odsyłacze do istniejącej literatury. Końcowy Rozdział 4 jest, paradoksalnie, mniej ciekawy od rozdziałów 2 i 3: tego typu wyników, opartych na zastosowaniach twierdzenia o przełęczy górskiej ukazuje się bardzo dużo. Tu akurat materiał jest formalnie nowy, ale nie widzę w samych dowodach tego podrozdziału nic szczególnie zaskakującego dla eksperta.

Kluczowe, najważniejsze wyniki rozprawy zawarte są w rozdziałach 2 i 3 i dotyczą twierdzeń o włożeniu dla przestrzeni Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem na rozmaitościach Riemannowskich, także w przypadku rozmaitości niezwartych, spełniających odpowiednie (dość naturalne i używane wcześniej w geometrii) założenia

o związku metryki i miary. Materiał ten został przygotowany na podstawie dwóch wspólnych prac Autora:

- Gaczkowski, Michał; Górka, Przemysław. Sobolev spaces with variable exponents on Riemannian manifolds. *Nonlinear Anal.* 92 (2013), 47–59.
- Gaczkowski, Michał; Górka, Przemysław; Pons, Daniel J. Sobolev spaces with variable exponents on complete manifolds. *J. Funct. Anal.* 270 (2016), no. 4, 1379–1415.

Są to dość obszerne teksty w poważnych czasopismach, dowodzące ponadprzeciętnego, godnego szacunku zaangażowania doktoranta w badania naukowe wspólne z promotorem pomocniczym – jest to modelowy przykład, pokazujący, jak może wyglądać rozwój kariery na tym etapie.

Tekst rozprawy można moim zdaniem oceniać próbę ‘książkowej’, wspólnej prezentacji wyników obu powyższych prac oraz ich zastosowań. Widać, że Autor do swojej pracy podchodzi z pasją i entuzjazmem, a także ze swoistym dydaktycznym zacięciem, właściwym wszystkim matematykom, którzy chcą wytłumaczyć innym, nad czym pracowali. Samą wagę i znaczenie wyników uważam za wystarczające, aby uznać, że rozprawa spełnia zwyczajowe i ustawowe wymagania.

Niemniej, mam szereg uwag krytycznych; napiszę o nich, bo po pierwsze uważam, że tekst rozprawy mógł być dużo lepszy, po drugie zaś jestem przekonany, że Autor będzie jeszcze pisał prace matematyczne i część moich (natrętnych) uwag może się mu w tej pracy przydać.

Uwagi ogólne. Po pierwsze, rozprawa jest miejscami bardzo nieporadna językowo: interpunkcja jest niezręczna (a miejscami woła o pomstę do nieba), można znaleźć wiele miejsc, gdzie lekko zgrzytają nie tylko autorskie komentarze, ale i sformułowania twierdzeń oraz definicji. Widać, że tekst nie przeszedł próby *czytania na głos*, która bezlitośnie obnaża wady językowe, nadmiernie długie zdania, niejasności komentarzy itp. Załączam na końcu recenzji dodatek z wyborem zauważonych literówek oraz innych niezręczności redakcyjnych.

Po drugie, bardzo mi podczas lektury brakowało wyraźnych wskazówek Autora co najmniej dwóch następujących rodzajów:

- Co znam od innych, a co zrobiłem sam?
- Które partie rozumowań lub tekstu są prostym (wykonanym np. dla spójności lub kompletności całej rozprawy) powtórzeniem tego, co znane jest w innych kontekstach, które są nowe, ale polegają na mechanicznym sprawdzeniu definicji, wreszcie – które dotyczą kluczowych trudności i naprawdę nowych pomysłów?

Więcej mogło być w tekście konkretnych odsyłaczy, także do prac samego Autora.

Po trzecie, praca bardzo by zyskała, gdyby mniej było w niej definicji powszechnie znanych pojęć, a więcej przykładów i więcej nacisku na staranną, globalnie redakcję tekstu. Oto dwa wybrane przykłady takich sytuacji:

- Twierdzenie 3.2.4: samo sformułowanie formalnie nic nie mówi o tym, że H jest pewną podgrupą grupy izometrii, a nawet gdy Czytelnik to widzi, to nie od razu musi się zorientować, że założenie o wielkości $M(x, R)$ jest w istocie kluczowym założeniem o tej podgrupie, a nie o samej rozmaitości M .

Jak sobie wyobrażam optymalną prezentację tego twierdzenia i otaczającego materiału? Po pierwsze, należałoby jawnie i wyraźnie – także w samym twierdzeniu – powiedzieć, jakim obiektem jest H ; warto byłoby też wielkość $M(x, R)$ oznaczyć tak, żeby uwidocznic jej zależność od H . Po drugie, samą definicję $M(x, R)$, poprzedzającą twierdzenie, warto byłoby uzupełnić przykładami odnoszącymi się do Uwagi 3.2.1 i mówiącymi np., jakie podgrupy grupy przesunięć w \mathbb{R}^n spełniają założenia Twierdzenia 3.2.4, a jakie – nie spełniają, i co to ma wspólnego z zachowaniem przestrzeni Sobolewa na \mathbb{R}^n , walcu, torusie. Pozwoliłoby to Czytelnikowi zrozumieć – także bez lektury szczegółów dowodu – w jaki sposób założenie o H i niezmienniczości rozpatrywanych funkcji pozwala usunąć zjawisko niezwartości, widoczne w Uwadze 3.2.1.

- Dowód Lematu 3.2.5 zaczyna się od frazy: *... potrzebujemy dobrać wykładnik β z Lematów 3.2.6 i 3.2.7.* Tymczasem w sformułowaniu Lematu 3.2.7 literka β w sposób jawny nigdzie nie występuje (i pojawia się dopiero w dowodzie tego lematu) – Czytelnik jest odsyłany do Lematu 3.2.6, gdzie już β występuje także w sformułowaniu. Drobiazg, ale nawigowanie w tekście bardzo utrudnia. Należy pamiętać, że ludzie nie czytają tekstów matematycznych jak powieści – zwykle czytamy dość nieliniowo i nielokalnie, skupiając się na tym, co naprawdę nas interesuje.

Poprawienie tego stanu rzeczy wymaga wprawdzie jedynie dość trywialnych zabiegów redakcyjnych, niemniej liczba podobnych miejsc w pracy jest dość duża...

Myślę, że poprzez ten brak staranności zmarnowana została szansa na napisanie *naprawdę dobrego* tekstu, który – dla osób wykorzystujących przestrzenie Sobolewa ze zmiennym wykładnikiem zarówno w \mathbb{R}^n , jak i na rozmaitościach – stanowiłby główne źródło wiedzy o twierdzeniach o włożeniu w różnych kontekstach, o tym, kiedy operatory włożenia są zwarte, jakie pytania są wciąż otwarte itp. Taki tekst miałby duże szanse stać się istotnym, dość podstawowym źródłem w tej dziedzinie analizy i równań cząstkowych – natomiast przedłożona rozprawa wystarczy, żeby wyposażyć jej

autora w stopień doktora nauk matematycznych, lecz poważnym, dobrze oczyszczonym materiałem źródłowym w obecnym kształcie *nie będzie*.

Pragnę jednak wyrazić, przed podsumowaniem całości, zaznaczyć, że są to uwagi krytyczne, które nie mają wpływu na to, czy moja ostateczna ocena rozprawy jest pozytywna – bo taka właśnie jest.

Uważam, że rozprawa nie zawiera wyników, które – biorąc pod uwagę ostre, światowe kryteria oceny – należałoby uznać za *nadzwyczaj* pomysłowe lub *bardzo zaskakujące*. Praktycznie wszystkie użyte metody i techniki dowodowe mają swoje pierwowzory, dobrze znane w literaturze – często w literaturze podręcznikowej. Niemniej, tematyka bez wątpienia jest technicznie trudna, zaś autor zdecydowanie przekonał mnie, że potrafi się w niej poruszać sprawnie, jak solidny rzemieślnik. Dlatego nie mam wątpliwości, że przedstawiona rozprawa dowodzi kwalifikacji matematycznych autora i spełnia wszystkie ustawowe (por. art. 13 ust. 1 Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym), a także zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim.

Dlatego z przekonaniem wnoszę o dopuszczenie Pana mgra Michała Gaczkowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



**Dodatek: lista literówek, drobnych usterek
i innych mniej istotnych szczegółowych uwag recenzenta.**

Uwaga ogólna. Zasadniczo biorąc, poza nielicznymi wyjątkami nie komentuję (czasem zupełnie fantazyjnej i niezgodnej z przyjętymi regułami) interpunkcji w tekście i we wzorach – liczba uwag byłaby wtedy zbyt duża.

Disclaimer. Nie ma gwarancji, że wszystkie zamiary na konkretne wiersze są wolne od błędów recenzenta.

1. Strona 10, wiersz 5 od dołu: Aubin to męczyzna i jego nazwisko w polskim tekście należy odmieniać.
2. Strona 11, wiersz 12 od dołu (a także inne miejsca): ‘Poincarégo’ (patrz wyżej).
3. Strona 13, ostatni wiersz: formalnie, wypada napisać $x \in X$.
4. Strona 15, wiersz 11 od dołu: powinno być ‘od punktu’.
5. Strona 16, wiersz 3: formalnie, lewa strona równości nie została zdefiniowana.¹
6. Strona 16, wiersz 7: tę definicję.
7. Strona 22, Twierdzenie 1.2.3: oznaczenia półnormy inne, niż w definicji powyżej (zamienione indeksy).
8. Strona 23, wiersz 2 od dołu: tę własność.
9. Strony 24–25, Uwaga 1.2.9: po co rozważać dist_L dla różnych $L > 0$? Wystarczyłoby się ograniczyć do dist_1 , żeby przekazać Czytelnikowi konkluzję.
10. Strona 25, Twierdzenie 1.2.10: fraza “stała z włożenia” nie została zdefiniowana, to żargon. Lepiej mówić o normie operatora włożenia, odwołując się do konkretnego wyboru norm w obu przestrzeniach.
11. Strona 25, strona 22, liczne inne miejsca: wypadałoby się zdecydować na jedną, konkretną pisownię przymiotnika ‘lipszycowski’.
12. Strona 25, Twierdzenie 1.2.11, punkt ii): do twierdzenia w tej postaci potrafię dać kontrprzykład (jak myślę, Autor chciał zamiast p^+ napisać p^-). Na stronie 58 jest dobrze, więc nie czepiam się nadmiernie.
13. Strona 25: odwołując się do Uwagi 1.2.9, można byłoby tu napisać, że to po prostu wersja znanego, klasycznego twierdzenia Kirszbrauna o przedłużaniu funkcji lipszycowskich. Ułatwiłoby to czytanie i rozumienie tekstu.

¹Wydaje się, że całą Definicję 1.1.12 można zapisać w strawniejszej postaci.

14. Strona 26, Definicja 1.3.1: przestrzeń topologiczną.²
15. Strona 30, wiersz 12: kropka (zamiast przecinka) w środku zdania.
16. Strona 31, drugi podpunkt warunku z Definicji 1.3.18: brakuje mi słowa *tylko*; liczba funkcji, a nie ilość funkcji.
17. Strona 33, drugi wiersz od góry: miało być R_c , nie RC .
18. Strona 33, wiersz 13: *pewnego $a > 0$* (bez tego słowa to nieprawda na niezwanej rozmaitości).
19. Strona 34, wiersz 9 od dołu: opuszczenia (a nie podniesienia).
20. Strona 34, wiersz 7 od dołu: powinno być $g_{i,r,s}$.
21. Strony 34–35, różne miejsca: lepiej byłoby nie używać litery T jednocześnie dla oznaczania tensorów i przestrzeni stycznej.
22. Strona 35, wiersze 12–11 od dołu: szyk zdania.
23. Strona 35, Definicja 1.3.30 (a także inne miejsca dalej): warto byłoby zdecydować się na jednolitą wersję oznaczeń, exp_p albo \exp_p .
24. Strona 36, wiersz 5: akapit złamany w pół zdania.
25. Strona 36, wiersze 11–12: ‘promień, na którym potrafimy szacować metrykę’ brzmi bardzo żargonowo, źle, niejasno. Chodzi o promień, wyznaczający skalę odległości na M , w której potrafimy szacować metrykę wraz z pochodnymi.
26. Strona 36, Definicja 1.3.34: użycie litery i w tym kontekście to średni pomysł. Owszem, kojarzy się z *in*jektywnością, ale to jednak skala odległości. Potem, w następnym twierdzeniu, ta decyzja ma swoje niedobre konsekwencje, a pół strony dalej i oznacza indeks...
27. Strona 37, Lemat 1.3.36: mapą.
28. Strona 38, Lemat 1.3.37: formalnie, nie wiadomo, *gdzie* ma zachodzić nierówność z założenia.
29. Strona 38, wiersz 5: brakuje spacji.
30. Strona 38, wiersz 9: wiem, że niektórzy czasem tak piszą, ale w tym zdaniu brak dopełnienia.
31. Strona 38, wiersz 8 od dołu: czy na pewno ‘prostą’?

²Nie jestem pewien, czy Autor świadomie pomija sprawę aksjomatów oddzielania.

32. Strona 38, wiersz 1 od dołu: zbędny znak równości.
33. Strona 39, wiersz 11 od dołu. ‘Stąd warunek.’ Jaki? Chodzi o to, co definiujemy niżej?
34. Str. 39–40, sformułowanie twierdzenia 1.3.40: postaramy się zmniejszyć liczbę wystąpień przymiotnika ‘następujący’ i skrócić tekst.
35. Strona 40, wiersz 9 od dołu: ‘punkcie’.
36. Strona 41, wiersz 12: powinno być moim zdaniem $L_k^q(M)$.
37. Strona 42, wiersz 2: kim jest ‘on’, wymieniony w tym zdaniu? Formalnie, ten fragment jest napisem pozbawionym sensu.
38. Strony 42–43, dowód lematu 1.3.47: ten dowód jest dobrze znany w przypadku euklidesowym; zamiast go powtarzać, lepiej dać komentarz, że na (odpowiednio) małych kulach na różnicowości wszystko jest tak samo, jak w \mathbb{R}^n .
39. Strona 43, Definicja 1.3.49: wystarczyłoby pisać o uzupełnieniu $C_0^\infty(\Omega)$ w odpowiedniej normie.
40. Strona 44, wiersze 4–5: bardzo niezręczne językowo pierwsze zdanie w sformułowaniu twierdzenia.
41. Strona 44, drugie zdanie dowodu: brakuje słówka ‘dla’.
42. Strona 44, wiersz 12: to wygląda jak brudnopis notatek.
43. Strona 44, wiersz 6 od dołu: pomyłone indeksy; wypisana nierówność to, formalnie, $0 \leq \varepsilon$, nic ciekawego ...
44. Strona 44, wiersz 4 od dołu: patrz poprzedni punkt.
45. Strona 45, wiersze 8–10: to powinno być jedno zdanie, a teraz nie jest.
46. Strona 45, tekst Uwagi 1.3.51: formalnie, nie wiadomo, co oznacza w tym tekście litera V ; samo odwołanie do treści poprzedniego twierdzenia nie pomaga, bo tam V nie występuje.
47. Strona 46, wiersz 2: ‘na na’ \longrightarrow ‘na’.
48. Strona 46, wiersz 6 od dołu: n_n^k (dwakroć) ...?? Co to jest?
49. Strona 46, wiersz 3 od dołu: to nie jest zdanie (brak orzeczenia).
50. Strona 49, wiersz 4 od dołu: zaadaptowane.

51. Strona 50, wiersz 14 od dołu: Lewa strona nie ma sensu przy przyjętych oznaczeniach. Prawa nierówność oczywiście (w typowych sytuacjach) nie zachodzi, wpp byłoby $1 \leq 1 - \delta$.
52. Strona 52, wiersz 1: δ .
53. Strona 55, wiersz 5: przymiotnik utworzony od nazwiska Lipschitza nie ma ani pisowni polskiej, ani pisowni zaczerpniętej z niemieckiego.
54. Strona 55, wiersz 9 od dołu: indeks n w podwójnym znaczeniu; ponadto, wypada zadbać o interpunkcję.
55. Strona 57, wiersz 3: Kroneckera (apostrof jest zbędny).
56. Strona 57, wiersz 6 od dołu: powinno być ‘ze’.
57. Strona 57, wiersz 3 od dołu: Z twierdzenia (numer) *wynika*, że jeśli (coś tam, coś tam), to (coś tam, coś tam).
58. Strona 57, ostatni wiersz: wypada napisać, o *które* lematy chodzi.
59. Strona 58, wiersz 8 od dołu: Whiteheada (apostrof jest zbędny).
60. Strona 60, wiersz 9 od dołu: $L_1^{q(\cdot)}(M)$ w indeksie po prawej stronie.
61. Strona 60, nierówność (2.1.6): ta sama uwaga, co wyżej.
62. Strona 61, wiersz 7: znów łamanie akapitu w środku zdania.
63. Strona 63, pierwszy wiersz dowodu Tw. 2.1.3: ‘od przypadku’.
64. Strona 64, wiersze 4–3 od dołu: niegramatyczny tekst, zasadniczo pasujący do wzorca ‘leżąc pod stołem, padł strzał’.
65. Strona 65, wiersz 5 od dołu: po co używać tu literki p , skoro w całym tekście akapitu gdzie indziej jej nie ma?
66. Strona 65, wiersze 3–2 od dołu: lepiej byłoby napisać po prostu $U = (\dots)$. Brak przecinka w definicji zbioru usuwanego ze sfery S^2 .
67. Strona 67, wiersze 2–5: liczba kropek błędnie postawionych lub niepostawionych na końcu zdania jest (w tym rejonie) równa 3.
68. Strona 68, Twierdzenie 2.2.1 ii): znów, powinno być moim zdaniem $q^- > n$.
69. Strona 70, wiersz 10 zawiera frazę: “z faktu... możemy wybrać”. Upierałbym się, że wybieramy to pokrycie nie “z faktu”, ale z rodziny odpowiednich kul.
70. Strona 72, wiersz 11 od dołu: nie zaczyna się zdania od ‘Więc’.

71. Strona 73, wiersze 10–11: gdzie tu się zdanie kończy, gdzie zaczyna? Zaczynanie zdania od ‘Co’ uważam za mocno niezręczny zabieg (tu i u dołu str. 73).
72. Strona 73, wiersz 2 od dołu: tu Autor powołuje się na założenie, na które powinien się powołać (ale którego nie ma formalnie w tekście twierdzenia).
73. Strona 75, wiersz 14: zgodnie z regułami polskiej gramatyki i składni, w tym zdaniu określenie ‘dla niego’ odnosi się do wcześniej wspomnianego ‘skończonego pokrycia o żądanych własnościach’; autor nie to chciał powiedzieć.
74. Strona 75, Uwaga 2.2.3 ii), raz jeszcze: $q^- > n$; patrz np. przejście z linijki 7 do 8 na stronie 76.
75. Strona 77, wiersze 6–4 od dołu: ślady copy–paste z angielskiego tekstu (jak się wydaje, ze strony 1390 wspólnej pracy autora w J. Funct. Anal.).
76. Strona 78, nierówność (3.1.1): lewa strona powinna być chyba nieostra (dlaczego nie miałyby istnieć punkty, należące tylko do jednej kuli z danego pokrycia?).
77. Strona 78, wiersz 6: “stała Lipschitza funkcji η_i jest mniejsza niż H ” – nie widzę dowodu ostrej nierówności $\text{Lip}(\eta_i) < H$ (to nieistotne, bo wspomniana stała jest *tego rzędu*, co H).
78. Strona 78, wiersz 7 od dołu: ‘gdzie’ z małej litery, nie łamać akapitu w środku zdania.
79. Strona 79, wiersze 6–7: znów, gdzie tu się zdanie kończy, gdzie zaczyna?
80. Strona 80, pierwsza linijka dowodu lematu: ‘funkcją gładką’.
81. Strona 81, wiersze 4–3 od dołu: nie rozumiem tego komentarza. W Twierdzeniu 2.2.2 wcześniej jest jednak ostra nierówność (i taka moim zdaniem powinna być).
82. Strona 82, wiersz 1: ‘Załóżmy’, przez ‘ż’.
83. Strona 83, wiersz 10 od dołu: powinno być $u \in \dots$ (zapewne brakuje znaku backslasha w kodzie \TeX -owym źródła).
84. Strona 86, wiersz 3: ‘Łącząc’.
85. Strona 86, wiersz 4 od dołu: ‘co kończy’.
86. Strona 89, trzecia linijka dowodu: jedno u_n należy zastąpić przez u ; teraz w tekście mamy tautologię.
87. Strona 96, wiersz 2 od dołu: ‘co najwyżej’.

88. Końcowa część pracy, liczne miejsca: brak konsekwencji w użyciu dV_g i dV_g .
89. Strona 98, 6 wiersz podrozdziału 4.1: zdanie kończące tę linijkę nic nie mówi komuś, kto nie jest dobrze obeznany z pracą [11].
90. Strona 99, wiersz 11 od dołu: po prawej stronie lepiej byłoby użyć innej litery niż u .
91. Strona 100, nierówność (4.1.4): brak wykładnika przy jednej z norm po prawej stronie (podana nierówność nie zachowuje się, gdy mnożymy u przez skalary).
Detal, ale propaguje się dalej...
92. Strona 101, wiersz 7: ‘Przypomnijmy’. Nawiasem: warunek, o którym tu mowa, występuje w bardziej precyzyjnej postaci na str. 107–108. (Skąd tam biorą się odpowiednie stałe? Jakiś odsyłacz?).
93. Strona 102: przydałby się prosty i konkretny przykład, przekonujący Czytelnika, że istnieją *zmiennie* wykładniki, spełniające założenia (ii) oraz (iii).
94. Strona 106 i dalej: potwornie długie środowisko *itemize*; nie jest przez to wcale czytelniej, tylko skład brzydszy i np. na str. 1007–108 mamy lewy brzeg tekstu w regularną, miejscami dość paskudną chorągiewkę.
95. Strona 108, wiersz 8 od dołu: Höldera (w oryginalnym tekście zbędny apostrof).
96. Strona 109, wiersz 10: raz jeszcze, ‘Przypomnijmy’ (czyżby copy-paste ze strony 101?).
97. Strona 112, poz. [35]: Meyers. Znak zapytania (wg. MR) niepotrzebny.
98. Strona 112, poz. [36]: brak spacji między inicjałami; ‘isometries’ (w tekście niepotrzebnie duże I).
99. Strona 113, poz. [43]: książka Struwego ma cztery wydania; warto podawać odnośnik do najnowszego (w przypadku książki Evansa autor z jakiegoś powodu nie cytował najstarszego wydania).
100. Strona 113, poz. [47]: brak spacji między inicjałami (choć wyżej jest).