Dr hab. Mariusz Michta, prof.UZ
Wydział Matematyki,
Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski
Szafrana 4a, 65-246 Zielona Góra

Zielona Góra, 29.08.2016

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Dariusza Sochy pt. Problem optymalnej wypłaty dywidendy w dyskretnym modelu nadwyżki firmy ubezpieczeniowej

1. Wstęp

Przedmiotem recenzowanej rozprawy jest analiza problemu optymalnej wypłaty dywidendy w modelu nadwyżki finansowej firmy ubezpieczeniowej. Analizowany w rozprawie problem dotyczy dyskretnego modelu nadwyżki ubezpieczyciela (X_n) zadanego w postaci rekurencyjnej:

$$X_{n+1} = X_n - U_n + Y_{n+1}, \tag{1.1}$$

z kapitałem początkowym $X_0 = x \geq 0$, Y_n-różnicą pomiędzy składkami i wypłatami odszkodowań oraz wysokością dywidendy U_n. Opisane w pracy zagadnienia dotyczą postaci optymalnych strategii wypłat kwot dywidend. Zatem, chodzi o ciąg, który maksymalizuje funkcjonał

$$V((U_n), x) = E\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \gamma^n U_n | X_0 = x\right]$$

oraz badanie własności funkcji wartości

$$V(x) = \sup_{(U_n)\in\Pi} V((U_n), x). \tag{1.2}$$

Problem poszukiwania optymalnej strategii wypłat dywidend oraz badanie własności funkcji wartości został w rozprawie sprowadzony do analizy odpowiedniego równania Bellmana. Stosowane tu metody i techniki pochodzą między innymi z pracy Autora rozprawy [21], opublikowanej w 2014 r. Po części stanowią adaptację podejścia zastosowanego w [1] i [22]. Jak zaznaczono we wstępie rozprawy, powyższy model pochodzi z lat 50-tych ubiegłego stulecia i był zaproponowany przez de Finettiego [11], a następnie badany między innymi przez Miyasawę [17], Gerbera [13], Shubika i Thompsona [23] oraz Morill'a [18] i Borcha [7-9]. W przypadku czasu ciągłego analogiczne modele były badane przez Asussena i Taksara [2], Kyprianou i Palmowskiego [15] (modele z ruchem Browna) oraz przez Avrama, Palmowskiego i Pistoriusa [3], Borcha [7] (dla modelu Cramera-Lundberga). W tych przypadkach głównym narzędziem zastosowanym w analizach była teoria procesów Levy'ego. Jednym z istotnych zagadnień badanych w rozprawie jest optymalność strategii barierowych używanych jako kryterium wypłaty dywidendy. W przypadku modelu nadwyżki z czasem ciągłym optymalność takich strategii wykazał Loeffen w [16]. Przypadkowi wypłat dywidend w losowych chwilach czasu poświęcona została praca Albrecher'a, Bauerle'a oraz Thonhauser'a [1]. Zatem, tematyka zawarta w rozprawie jest ciekawa, należy do "klasyki gatunku" i jest nadal intensywnie rozwijana.

2. Zawartość rozprawy

Rozprawa liczy 127 stron. Pracę poprzedza wstęp, w którym przedstawiono główny model oraz zarys historii rozpatrywanych zagadnień. Zasadnicza część pracy składa się z siedmiu rozdziałów. W ostaniej cześci Autor umieścił dodatek zawierający uwagi dotyczące możliwości pewnych uogólnień zasadniczych wyników. Rozdział pierwszy zawiera analizę równania Bellmana (dla $x \geq 0$)

$$\bar{V}(x) = \sup_{0 \leq u \leq x} \left\{ u + \gamma E\left(\bar{V}(x-u+Y)\chi_{\{x-u+Y\geq 0\}} \right) \right\},$$

które w równoważnej postaci (przy założeniu, że ν jest wspólnym rozkładem ciągu (Y_n), $Y =^d Y_n, n \geq 0$) ma kształt

$$\bar{V}(x) = \sup_{0 \leq u \leq x} \left\{ u + \gamma \int_{-(x-u)}^{\infty} \bar{V}(x-u+y)\nu(dy) \right\}. \tag{1.0.4}$$

Zasadniczym wynikiem tej części pracy jest twierdzenie mówiące, że funkcja wartości (1.2) jest rozwiązaniem (1.0.4) oraz opisujące postać strategii optymalnej (Twierdzenie 1.0.8.). Dowód tego twierdzenia jest rozszerzoną, uszczegółowioną wersją dowodu analogicznego wyniku opublikowanego w pracy Autora [21] i oparty został o Twierdzenie 1.0.2, z wykorzystaniem Twierdzenia Banacha o kontrakcji w przestrzeni ograniczonych funkcji mierzalnych (przestrzeni ograniczonych funkcji ciągłych, w przypadku, gdy ν jest rozkładem ciągłym) oraz kilku dodatkowych rezultatach pomocniczych. W dalszej kolejności podane zostały wraz z dowodami rezultaty dotyczące własności rozwiązania V oraz optymalnej strategii. Na uwagę zasługują tu rezultaty dotyczące oszacowania wartości rozwiązania (Proposition 1.1.1) oraz Twierdzenie 1.1.6 o optymalności strategii pasmowej (postaci z Definicji 1.1.4) w modelu optymalnej dywidendy (1.2).

W Rozdziale 2 Autor rozważa sytuację, gdy rozkład zmiennej losowej Y jest skoncentrowany na określonym podzbiorze liczb całkowitych ograniczonych z dołu. Głównym rezultatem jest tu Twierdzenie 2.0.7 o oszacowaniu długości optymalnej strategii pasmowej, przy założeniu odpowiedniej postaci dolnego oszacowania prawdopodobieństwa na ograniczenie z dołu wartości zmiennej Y. Autor wykazał się sporą pracowitością przeprowadzając dość złożony i żmudny dowód tego rezultatu. Twierdzenie to uogólnia wynik uzyskany przez Miyasawę w [17].

Rozdział trzeci dotyczy przypadku wykładniczego rozkładu strat (rozkładu zmiennej Y). W tym przypadku, zachodzi twierdzenie o optymalności strategii barierowej (Twierdzenie 3.1.6). To interesujący wynik rozszerzający wcześniejszy rezultat Borcha z [6], na klasę innnych rozkładów wykładniczych, niż te, które spełniają założenia Borcha. Np. chodzi tu o połączenie przypadku występownia dużych składek oraz strat o dużych średnich. Ponadto, podane zostało oszacowanie z góry optymalnego progu strategii barierowej (Proposition 3.1.9). Dodatkowo, przedstawiona została procedura uzykania jawnej postaci rozwiązania V problemu optymalnej dywidendy. Wyniki wraz z ich dowodami, zapisane w tej części rozprawy pochodzą z opublikowanej pracy Autora [21]. W rozprawie zostały jednak przedstawione w bardziej rozwiniętej formie.

Kolejna część rozprawy koncentruje uwagę czytelnika na analizie przypadku strat o rozkładzie Erlanga. W tych warunkach strategią optymalną jest strategia pasmowa o skończonej liczbie progów (Wniosek 4.0.13). Jest to nowy wynik, nie publikowany wcześniej i stanowi częściową analizę głównego problemu rozprawy w tym przypadku. Autor dokonał tu analizy maksimów pomocniczej funkcji zmiennej u, w postaci wyrażenia występującego pod supremum w (1.0.4), w przypadku rozkładu Erlanga.

W cześci piątej rozważania Autora dotyczą przypadku stałej składki. O rozkładzie strat zakłada się, że jest rozkładem ciągłym o gęstości klasy C^2, spełniającej warunek logarytmicznej wypukłości. W Proposition 5.1.4, Twierdzeniu 5.1.5 oraz Wniosku 5.1.6 uzyskano optymalność strategii barierowej. Są to nowe rezultaty, a ich dowody są złożone. Ich przeprowadzenie wymagało z jednej strony pomysłowości, z drugiej zaś, biegłości rachunkowej. Uzyskane wyniki zostały zilustrowane również w szczególnych przypadkach: dla rozkładu Pareto (Przykład 5.1.7) oraz mieszanki rozkładów wykładniczych (Przyklad 5.1.8). Zawartość rozdziału uzupełnia Twierdzenie 5.1.9. (o optymalności strategii barierowej) z alternatywnym dowodem-opartym na zastosowaniu przekształcenia kontrakcyjnego- w stosunku do podanego przez Borcha w [6] (przy innych założeniach niż wcześniejsze) oraz jego wniosek. Podkreślić należy również fakt, że Autor skonstruował przykład ilustrujący istotność założeń występujących w głównych twierdzeniach tej części (Przykład 5.1.12).

Wyniki uzyskane w kolejnej części rozprawy stanowią dyskretne odpowiedniki rezultatów z poprzedniego rozdziału. Jak poprzednio zakłada się tu stałą składkę, a zmiana dotyczy rozkładu strat, który jest logarytmicznie wypukły w sensie dyskretnym. Główne wyniki to: Proposition 6.1.5 i wynikające z niego Twierdzenie 6.1.6 o optymalności strategii barierowej. I w tym przypadku, przeprowadzone dowody są żmudne, wieloprzypadkowe i wymagały dużej pracy Autora. Również i w tym przypadku Autor podaje i dowodzi twierdzenie o optymalności strategii jednoprogowej przy innych jeszcze założeniach. Uzyskane wyniki ilustrują przykłady z konkretnymi rozkładami dyskretnymi (Przykłady 6.1.7 i 6.1.8). Podobnie jak w Rozdziale 5, uzyskane w tej części rezultaty są nowymi wynikami.

Rozdział 7 dotyczy analizy optymalnych strategii wypłady dywidendy w klasycznym modelu Cramera-Lundberga, ze skumulowaną wypłatą dywidendy w momentach zgłoszeń szkód. Główny wynik tego rozdziału stanowi Twierdzenie 7.0.16 o optymalności strategii barierowej i jest konsekwencją własności wykazanych w Proposition 7.013 i 7.0.15. Dowody obu rezultatów są skomplikowane i długie. I tym razem wymagały sporej pracowitości Autora.

Rozprawę kończy rozdział zawierający uwagi nt. problemu optymalnej dywidendy przy założeniu, że czas ruiny jest postaci: $\tau = \min\{n : X_n \leq 0\}$. Wcześniej, analizy prowadzone w rozprawie dotyczyły przypadku $\tau = \min\{n : X_n < 0\}$. W tym przypadku Autor podaje postać strategii ϵ-optymalnej (Proposition 8.4.1) oraz analizuje maksymalizację funkcjonału średniej użyteczności wypłaconych dywidend, przy założeniu warunków Inady dla funkcji użyteczności.

3. Uwagi nt. rozprawy

Generalnie rozprawę należy ocenić pozytywnie. Jak napisano już wcześniej, dowody zawartych w niej wyników bazują na dość skomplikowanych analizach i oszacowaniach. Ich przeprowadzenie wymagało dużo pracy i biegłości. Wyniki przedstawione w pracy są rozszerzeniem lub uzupełnieniem częściowo znanych dotąd rezultatów. Pewne z nich są nowe i dotąd niepublikowane.

Przejdę teraz do uwag krytycznych. Pewne zastrzeżenia może budzić zbyt lakoniczna, w kilku miejscach, forma przedstawionych rozumowań w zamieszczonych dowodach. To nie ułatwia lektury. Pozostałe usterki mają głównie charakter redakcyjny. Autor powinien wykazać większą staranność w tym zakresie. W punktach poniżej wypisane zostały dalsze uwagi.

1. Autor nie powinien używać, w rozprawie pisanej w języku polskim, określeń takich jak: Proposition, Lemmat , słów "if". Dlaczego nie użyć polskich słów Stwierdzenie, Lemat, "dla", "gdy" lub "jeśli"(?). Tym bardziej, że powołując się na konkretne "Proposition XXX" lub "Lemmat XXX" zawsze używa określeń "Stwierdzenie XXX" lub "Lemat XXX".

2. W dowodzie "Proposition 1.0.5", na str. 14, zbiór A^c powinien mieć postać $\{x : z(x) < 0\}$ zamiast $\{x : z(x) > 0\}$ (jako konsekwencja $A^c = \{x : W(x) > f(x)\}$ oraz $z = f - W\}$.

3. W tezie Lematu 1.0.7 (w rozprawie Lemmat 1.0.7, str. 15) brakuje "dla każdego $n \geq 1$". W dowodzie, całki występujące w określeniu $\bar{V}(x)$ powinny być względem rozkładu ν, a nie miary Lebesgue'a.

4. W tezie Lematu 1.2.1 (w rozprawie Lemmat 1.2.1, str. 24) nierówność z operatorem T powinna mieć postać: $T(g)(x) \leq T(h)(x)$.

5. W pierwszym zdaniu dowodu Lematu 3.1.5 (w rozprawie Lemmat 3.1.5) powinno być odwołanie do Lematu 3.1.3 zamiast Lematu 3.1.1.

6. Teza Lematu 5.1.3 (w rozprawie Lemmat 5.1.3, str. 55/56) powinna się rozpoczynać sformułowaniem: "Wtedy funkcja $f_0 \in C^2(R^+)$.....", ewentualnie: "Wtedy funkcja $f_0(\cdot) \in C^2(R^+)$.....".

7. W formule (7.0.28), na str. 100, powinno być "$\sup_{(D_n)\in\Pi}$ .....". Podobna uwaga dotyczy jeszcze paru innych miejsc. Ponadto, w samej formule występuję

nieokreślony parametr α. Należy przypuszczać, że "$\alpha = \gamma$" (?), gdzie γ, jak w całej rozprawie, oznacza czynnik dyskonta.

8. W dowodzie Lematu 7.0.10 (w rozprawie Lemmat 7.0.10, str. 100), w oszacowaniu dla $V(x)$ występują nieokreślone zmienne $T_1, T_2, \ldots$. Należy przypuszczać, że są to odstępy między momentami zgłoszeń/realizacji szkód (?).

9. W Rozdziale 7 rozważany jest model (7.0.27) (str 100): $X_t = x + dt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - D_{N_t}$, gdzie D oznacza skumulowaną dywidendę. Wydaję się, że bardziej naturalnym modelem byłby model postaci: $X_t = x + dt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \sum_{i=1}^{N_t} D_i$ z ciągiem dywidend (D_n) wypłacanych w chwilach realizacji szkód, a zatem ze skumulowaną dywidendą postaci $\bar{D}_t = \sum_{i=1}^{N_t} D_i$.

4. Wnioski końcowe

Pomimo zauważonych usterek uważam, że tematyka rozprawy jest ciekawa. Wyniki są nowe i częściowo opublikowane w pracy Autora [21]. Aparat matematyczny wykorzystywany w dowodach jest złożony i jego stosowanie wymagało nabycia opowiedniej wiedzy, jak również wykazania się dużą pracowitością i biegłością rachunkową. **Podsumowując, uważam, że rozprawa spełnia formalne warunki stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie Pana magistra Dariusza Sochę do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

M.Michta