AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: Bogusława Karpińska

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

- dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki (z wyróżnieniem), Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 1999, tytuł rozprawy doktorskiej: *Bukiety Cantora dla iteracji $\lambda \exp(z)$ i $\lambda \sin(z)$: wymiar Hausdorffa i miara Lebesgue'a*, promotor: prof.dr hab. Feliks Przytycki

- dyplom magistra matematyki (z wyróżnieniem), Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, 1993, tytuł pracy magisterskiej: *Powierzchnie osobliwe $z_1^p = z_2^2$ i ich monodromia. Interpretacja graficzna,* promotor: dr hab. Jerzy Jurkiewicz

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

- **od 2001** adiunkt
  Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
  Politechnika Warszawska

- **1993-2001** asystent
  Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
  (w 1999 przekształcony w Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych)
  Politechnika Warszawska

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595 ze zm.):

Rozprawa habilitacyjna zatytułowana
Własności metryczne i topologiczne zbiorów niezmienniczych w dynamice przestępnej
składa się z cyklu 5 prac:

[**R1**] K. Barański, B. Karpińska, A. Zdunik, *Hyperbolic dimension of Julia sets of meromorphic maps with logarithmic tracts*, Int. Math. Res. Notices 2009, No.4 (2009), 615-624
(w spisie literatury pozycja [10])

[**R2**] W. Bergweiler, B. Karpińska, G. Stallard, *The growth rate of an entire function and the Hausdorff dimension of its Julia set*, J. London Math. Soc. 80 (2009), 680- 698
(w spisie literatury pozycja [17])

[R3] W. Bergweiler, B. Karpińska, *On the Hausdorff dimension of the Julia set of a regularly growing entire function*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 148 (2010), 531-551
(w spisie literatury pozycja [16])

[R4] K. Barański, N. Fagella, X. Jarque, B. Karpińska, *On the connectivity of the Julia sets of meromorphic functions*, Invent. Math. 198 (2014), 591-636
(w spisie literatury pozycja [5])

[R5] K. Barański, N. Fagella, X. Jarque, B. Karpińska, *Absorbing domains for holomorphic maps*, J. London. Math. Soc. (2) 92 (2015), 144-162
(w spisie literatury pozycja [7])

Omówienie rozprawy:

Własności metryczne i topologiczne zbiorów niezmienniczych w dynamice przestępnej

Wstęp

Przedstawiana rozprawa dotyczy dynamiki funkcji meromorficznych, w tym całkowitych, na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Dziedzina ta jest częścią teorii Układów Dynamicznych. Rozważamy przekształcenia meromorficzne przestępne $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ (gdzie $\widehat{\mathbb{C}}$ jest sferą Riemanna), czyli takie, dla których nieskończoność jest punktem istotnie osobliwym. Półgrupa iteracji

$$f^n = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n \text{ razy}}$$

takiego przekształcenia (gdzie $n \geq 0$) tworzy dyskretny układ dynamiczny. Przedmiotem badań jest między innymi geometryczna i topologiczna struktura zbiorów niezmienniczych pod działaniem tej półgrupy.

Złożenie f^n jest zdefiniowane dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ poza przeliczalnym zbiorem punktów będących biegunami funkcji $f, f^2, .., f^{n-1}$. Jeśli f jest funkcją wymierną, to f można rozszerzyć do funkcji meromorficznej na sferze Riemanna $\widehat{\mathbb{C}}$. W rozważanym przez nas przypadku funkcji przestępnych f nie rozszerza się na $\widehat{\mathbb{C}}$.

Początki teorii iteracji funkcji holomorficznych na sferze Riemanna sięgają lat 20-tych XX wieku, a jej podstawy stworzyli Gaston Julia i Pierre Fatou. Teoria ta intensywnie się rozwija od lat 80-tych XX wieku, głównie dzięki nowym technikom (np. metodom chirurgii quasikonforemnych wprowadzonym przez Sullivana, Douady'ego i Hubbarda), ale także ze względu na rozwój grafiki komputerowej pozwalającej przedstawić niezwykłe, fraktalne kształty zbiorów Julii i innych zbiorów niezmienniczych. O znaczeniu tej teorii świadczyć mogą prestiżowe wyróżnienia przyznane matematykom zajmującym się tą dziedziną, jak np. Medale Fieldsa dla Yoccoza, McMullena, Smirnova i Avili.

Podstawowymi obiektami badań w teorii iteracji funkcji meromorficznych, zarówno wymiernych jak i przestępnych, są dwa rozłączne niezmiennicze podzbiory, na które w naturalny sposób dzieli się sfera Riemanna pod działaniem iteracji przekształcenia f: *zbiór Fatou* $\mathcal{F}(f)$ oraz *zbiór Julii* $\mathcal{J}(f)$. Zbiór Fatou składa się z tych punktów $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, dla których rodzina iteracji $\{f^n\}$ jest zdefiniowana i normalna w sensie Montela w pewnym otoczeniu z (tzn. z każdego ciągu przekształceń z tej rodziny można wybrać podciąg niemal jednostajnie zbieżny na tym otoczeniu do funkcji holomorficznej o wartościach w sferze Riemanna $\widehat{\mathbb{C}}$). Jest to zbiór otwarty, na którym dynamika f jest stabilna w tym sensie, że trajektorie bliskich punktów zachowują się podobnie. Zbiór Julii to dopełnienie zbioru Fatou: $\mathcal{J}(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(f)$. Na zbiorze Julii trajektorie zachowują się w sposób chaotyczny.

Każda składowa spójności U zbioru Fatou (nazywana krótko *składową Fatou*) jest przekształcana przez f w pewną składową Fatou. Oznaczmy przez U_n składową zawierającą $f^n(U)$. Jeśli dla pewnych różnych $n, m \geq 0$ zachodzi $U_n = U_m$, to taką składową nazywamy *preokresową*. Składowe, które nie są preokresowe nazywamy *błądzącymi*. W przeciwieństwie do przypadku funkcji wymiernych [63], zbiór Fatou dla funkcji meromorficznych przestępnych może zawierać składowe błądzące. Zachowanie iteracji f na składowych okresowych (tzn. takich, że $U = U_p$ dla pewnego $p \geq 1$) jest w pełni zbadane, zachodzi jedna z poniższych możliwości [2], [62]:

- Składowa U zawiera punkt okresowy przyciągający z_0 tzn. taki, dla którego $f^p(z_0) = z_0$ oraz $|(f^p)'(z_0)| < 1$. Wówczas $f^{np}(z) \to z_0$ dla $z \in U$ przy $n \to \infty$ i U nazywa się składową *basenu punktu przyciągającego* z_0.

- Brzeg U (w $\widehat{\mathbb{C}}$) zawiera punkt okresowy z_0 taki, że $f^p(z_0) = z_0$ oraz $f^{np}(z) \to z_0$ przy $n \to \infty$ dla $z \in U$. Wówczas $(f^p)'(z_0) = 1$. Wtedy U nazywa się składową *basenu parabolicznego*.

- Po holomorficznej zamianie współrzędnych $\varphi : U \to \mathbb{D}$, gdzie $\mathbb{D}$ jest dyskiem jednostkowym, f^p jest obrotem o kąt niewymierny tzn. $\varphi(f^p(\varphi^{-1}(z))) = e^{2\pi i\alpha}z$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wówczas U nazywa się *dyskiem Siegela*.

- Po holomorficznej zamianie współrzędnych $\varphi : U \to A$, gdzie A jest pierścieniem $A = \{z : 1 < |z| < r\}, r > 1$, f^p jest obrotem o kąt niewymierny tzn. $\varphi(f^p(\varphi^{-1}(z))) = e^{2\pi i\alpha}z$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wówczas U nazywa się *pierścieniem Hermana*.

- Istnieje punkt $z_0 \in \partial U$ (w $\widehat{\mathbb{C}}$) taki, że $f^{np}(z) \to z_0$ dla $z \in U$ przy $n \to \infty$, ale $f^p(z_0)$ nie jest zdefiniowane. Wówczas U nazywa się *dziedziną Bakera*.

W teorii iteracji funkcji przestępnych ważną rolę odgrywa także *zbiór punktów uciekających*:

$$I(f) = \{z : f^n(z) \to \infty \text{ przy } n \to \infty\}.$$

Dla funkcji całkowitych przestępnych zbiór ten jest ściśle związany ze zbiorem Julii; Eremenko [23], który jako pierwszy badał własności zbioru $I(f)$ dla iteracji dowolnej funkcji całkowitej, udowodnił, że zbiór Julii $\mathcal{J}(f)$ jest brzegiem $I(f)$. W teorii iteracji funkcji całkowitych przestępnych szczególną rolę odgrywa *klasa* $\mathcal{B}$ nazywana też klasą Eremenki-Lyubicha:

$$\mathcal{B} = \{f : \text{Sing}(f^{-1}) \text{ jest ograniczony}\},$$

gdzie Sing(f^{-1}) oznacza zbiór osobliwości funkcji odwrotnej (czyli zbiór skończonych wartości krytycznych i asymptotycznych f). Jak wykazali Eremenko i Lyubich [24], dla funkcji całkowitych $f \in \mathcal{B}$ zachodzi zawieranie $I(f) \subset \mathcal{J}(f)$.

Wspólnym celem prac zawartych w rozprawie habilitacyjnej jest zbadanie struktury zbiorów niezmienniczych dla iteracji przekształceń meromorficznych, w tym całkowitych, ze szczególnym uwzględnieniem związku z dynamiką. Prace [R1], [R2] i [R3] dotyczą iteracji funkcji całkowitych. Badamy w nich własności metryczne zbiorów niezmienniczych w zbiorze Julii. W [R1] i [R2] rozważamy funkcje całkowite z klasy $\mathcal{B}$. Praca [R1] zawiera oszacowanie dolne wymiaru hiperbolicznego zbioru Julii dla dowolnej funkcji całkowitej z klasy $\mathcal{B}$. Oszacowanie to otrzymujemy rozważając niezmiennicze podzbiory $\mathcal{J}(f)$ złożone z punktów nieuciekających. W pracy [R2] podajemy dokładne oszacowanie dolne na wymiar Hausdorffa zbioru Julli dla funkcji całkowitej z klasy $\mathcal{B}$ w zależności od szybkości wzrostu funkcji. W tej pracy oszacowania dotyczą zbioru punktów uciekających. Metody stosowane w dowodach pozwalają na rozszerzenie tych wyników na pewne funkcje meromorficzne. Wyniki z prac [R1] i [R2] przedstawiamy poniżej w podrozdziałach A i B.

Praca [R3] dotyczy funkcji całkowitych spoza klasy $\mathcal{B}$. Dowodzimy w niej, że zbiór Julii dla funkcji całkowitych o regularnym wzroście ma zawsze maksymalny wymiar Hausdorffa. Wprowadzamy techniki, które pozwalają pracować z funkcjami całkowitymi, dla których niedostępne są narzędzia wykorzystywane dla klasy $\mathcal{B}$. Omówienie pracy [R3] zawarliśmy poniżej w podrozdziale C.

Wyniki z pracy [R4] omówione w podrozdziałach D i E stanowią rozwiązanie znanego problemu związku spójności zbioru Julii dla funkcji meromorficznej przestępnej z istnieniem słabo odpychających punktów stałych. Otrzymane przez nas rezultaty pozwoliły zakończyć dowód twierdzenia mówiącego, że każda funkcja meromorficzna przestępna, której zbiór Julii jest niespójny, ma co najmniej jeden słabo odpychający punkt stały. Bezpośrednim wnioskiem z tego twierdzenia jest spójność zbioru Julii dla funkcji meromorficznych pochodzących od metody Newtona zastosowanej do funkcji całkowitych. Jednym z głównych rezultatów w [R4] jest twierdzenie o istnieniu zbiorów pochłaniających w dziedzinach Bakera. Badanie własności zbiorów pochłaniających kontynuujemy w pracy [R5] omówionej w podrozdziale E. Podajemy warunki, przy których istnieje jednospójna dziedzina pochłaniająca w niezmienniczej dziedzinie Bakera, a także charakteryzację typu przekształcenia (w sensie klasyfikacji Bakera-Pommerenke-Cowena) w terminach jego dynamicznych własności.

A. Wymiar hiperboliczny i wymiar Hausdorffa zbiorów Julii dla funkcji całkowitych z klasy $\mathcal{B}$

Wymiar Hausdorffa (który oznaczać będziemy przez $\dim_H$) zbiorów Julii dla funkcji całkowitych $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ badany był od końca lat 80-tych, kiedy McMullen [42] obliczył wymiar Hausdorffa zbioru Julii dla rodziny funkcji eksponencjalnych. Jednakże już w latach 70-tych Baker [1] wykazał, że zbiór Julii dowolnej funkcji całkowitej przestępnej f zawiera niezdegenerowane continua, co oznacza, że $\dim_H \mathcal{J}(f) \geq 1$. W [60] Stallard udowodniła ciekawy rezultat mówiący, że wymiar Hausdorffa zbioru Julii dowolnej funkcji całkowitej z klasy $\mathcal{B}$ jest ostro większy od 1 (choć może on być dowolnie bliski 1 [59]).

Bardzo użytecznym narzędziem wykorzystywanym do badania struktury zbioru Julii dla funkcji całkowitych przestępnych z klasy $\mathcal{B}$ jest *logarytmiczna zamiana zmiennych* [24]. Jeśli f jest funkcją całkowitą z klasy $\mathcal{B}$ to dla dostatecznie dużego R zbiór $\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ nie zawiera wartości krytycznych i wartości asymptotycznych funkcji f. Wówczas każda składowa T zbioru $f^{-1}(\Delta_R)$ jest jednospójna oraz $f : T \to \Delta_R$ jest nakryciem uniwersalnym. Definiujemy $F : \exp^{-1}(T) \to H$, gdzie $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > \log R\}$ tak, aby $\exp F(z) = f(e^z)$. Mówimy wówczas, że F jest funkcją otrzymaną z f poprzez logarytmiczną zamianę zmiennych. Natomiast zbiór T nazywamy *traktem logarytmicznym.*

W pracy [R1] badamy *wymiar hiperboliczny* zbioru Julii dla dowolnej funkcji całkowitej przestępnej $f \in \mathcal{B}$. Niech X będzie niezmienniczym, zwartym zbiorem Cantora zawartym w $\mathcal{J}(f)$ takim, że $|(f^k)'|_X > 1$ dla pewnego $k > 0$. Wówczas X nazywa się *konforemnym repellerem* w $\mathcal{J}(f)$. Wymiar hiperboliczny definiuje się jako supremum wymiarów Hausdorffa po wszystkich konforemnych repellerach w $\mathcal{J}(f)$. Oczywiście wymiar hiperboliczny $\mathcal{J}(f)$ jest niewiększy niż wymiar Hausdorffa. Jednakże, jak udowodniono w [65], może być ostro mniejszy.

W [R1] udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Wymiar hiperboliczny zbioru Julii dla dowolnej funkcji całkowitej przestępnej z klasy $\mathcal{B}$ jest większy od 1. W szczególności wymiar Hausdorffa zbioru punktów o ograniczonych orbitach w zbiorze Julii jest większy od 1.*

Dowód tego twierdzenia opiera się na metodach formalizmu termodynamicznego rozwiniętych przez Bowena, Ruelle'a i Waltersa w latach 70-tych [19, 55]. Jeśli $X \subset \mathcal{J}(f)$ jest konforemnym repellerem, to zgodnie ze znanym wzorem Bowena [19, 51] wymiar Hausdorffa X może być wyznaczony jako jedyna wartość t, dla której zeruje się *ciśnienie topologiczne*: $t \mapsto P(f|_X, t)$, gdzie

$$P(f|_X, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{w \in f^{-n}(z)\cap X} |(f^n)'(w)|^{-t}, \quad \text{gdzie } z \in X.$$

W dowodzie konstruujemy iterowany układ funkcyjny (IFS) złożony z konforemnych kontrakcji będących odpowiednimi gałęziami funkcji odwrotnej do F^2, gdzie F jest przekształceniem otrzymanym z f poprzez logarytmiczną zamianę zmiennych. Zbiór graniczny J_B tego układu funkcyjnego ma następujące własności:

$$F^2(J_B) = J_B, \quad \text{oraz} \quad (F^n)'(z) \to \infty \text{ dla } z \in J_B.$$

Wykorzystując wzór Bowena dowodzimy, że $\dim_H J_B > 1$. Zbiór $X = \exp((J_B) \cup F(J_B))$ jest wówczas konforemnym repellerem o wymiarze Hausdorffa większym od 1 zawartym w zbiorze Julii $\mathcal{J}(f)$. W szczególności trajektorie w przód wszystkich punktów z X są ograniczone.

Twierdzenie 1 daje oszacowanie dolne wymiaru Hausdordffa zbioru Julii dowolnej funkcji całkowitej z klasy $\mathcal{B}$ w oparciu o podzbiór złożony z punktów o ograniczonych orbitach; pokazujemy, że jest to „duży”, w sensie wymiaru Hausdorffa, podzbiór zbioru Julii.

Dla dowolnej funkcji całkowitej przestępnej z klasy $\mathcal{B}$ zbiór punktów uciekających $I(f)$ jest podzbiorem zbioru Julii $\mathcal{J}(f)$ [24], a więc oszacowania dolne na wymiar Hausdorffa $\mathcal{J}(f)$ można uzyskać także badając wymiar zbioru punktów uciekających. Jak wykazali Barański [4] i Schubert [57], jeśli funkcja całkowita z klasy $\mathcal{B}$ ma skończony rząd, tzn.

$$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r} < \infty, \qquad \text{gdzie } M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

to jej zbiór punktów uciekających ma wymiar Hausdorffa równy 2, co implikuje $\dim_H \mathcal{J}(f) = 2$.

Okazuje się, że wymiar zbioru Julii dla funkcji całkowitej z klasy $\mathcal{B}$ jest ściśle związany z szybkością wzrostu funkcji. W pracy [R2] udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. *Niech f będzie funkcją całkowitą przestępną z klasy $\mathcal{B}$ i niech $q \geq 1$. Załóżmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $r_\varepsilon > 0$ takie, że*

$$|f(z)| \leq \exp\left(\exp\left((\log|z|)^{q+\varepsilon}\right)\right) \quad \textit{dla } |z| \geq r_\varepsilon. \tag{1}$$

Wówczas

$$\dim_H \mathcal{J}(f) \geq 1 + \frac{1}{q}.$$

Oszacowanie podane w powyższym twierdzeniu jest najlepsze możliwe, jak pokazują przykłady Stallard skonstruowane w [61]. Założenie $q \geq 1$ nie jest tu ograniczeniem, wiadomo bowiem [38], że funkcje z klasy $\mathcal{B}$ nie mogą spełniać warunku (1) dla $q < 1$.

Twierdzenie to implikuje w szczególności, że wymiar Hausdorffa zbioru Julii dla funkcji całkowitych $f \in \mathcal{B}$ jest równy 2 nie tylko w sytuacji, gdy f ma skończony rząd, ale również wtedy, gdy spełniony jest ogólniejszy warunek:

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log\log r} = 1. \tag{2}$$

Twierdzenie 2 stosuje się między innymi do ciekawych przykładów funkcji całkowitych z klasy $\mathcal{B}$ skonstruowanych w [53]. Są to funkcje spełniające (1), których zbiór Julii nie ma nietrywialnych składowych łukowo spójnych.

W dowodzie Twierdzenia 2 rozważamy funkcję $F : \exp^{-1}(T) \to H$ otrzymaną z f przez logarytmiczną zamianę zmiennych. Dla dowolnego $p > q-1$ konstruujemy zbiór $E_p \subset \exp^{-1}(T)$ taki, że

$$\text{Re}\,(F^n(z)) \to \infty \ \text{ dla } z \in E_p$$

oraz

$$\dim_H E_p \geq 1 + \frac{1}{1+p}.$$

Oczywiście $\exp(E_p) \subset I(f)$. Ponadto zbiory E_p oraz $\exp(E_p)$ mają taki sam wymiar Hausdorffa. Konstrukcja zbiorów E_p opiera się na wprowadzonym przez nas pojęciu *zbioru dopuszczalnego*; jest to zbiór ograniczony, na którym wzrost funkcji F jest w pewnym sensie regularny. Zbiory E_p składają się z punktów, których kolejne iteracje (pod działaniem F) leżą w zbiorach dopuszczalnych. Do szacowania wymiaru Hausdorffa zbioru E_p wykorzystujemy techniki będące uogólnieniem klasycznej metody McMullena [42].

Idea szacowania wymiaru Hausdorffa zbioru Julii dla funkcji całkowitych spełniających (1) powstała z obserwacji, że oszacowania otrzymane w przykładach Stallard są bardzo podobne do oszacowań z [33], mimo, że prace te dotyczą różnych zagadnień. W [33] badaliśmy wymiar Hausdorffa podzbiorów zbioru Julii dla przekształceń eksponencjalnych $E_\lambda(z) = \lambda e^z$. Wykazaliśmy, że zbiór tych punktów uciekających, których trajektorie leżą w obszarze

$$\Omega = \left\{ x + iy : x > 1,\ \ y > \frac{x}{(\log x)^{q-1}} \right\}$$

ma wymiar Hausdorffa równy $1 + 1/q$. W [61] Stallard podała przykłady funkcji całkowitych z klasy $\mathcal{B}$, dla których wymiar Hausdorffa zbioru Julii jest zadaną z góry liczbą postaci $1 + \frac{1}{q}$ (dla $q > 1$). Funkcje te mają trakty logarytmiczne o kształcie zbliżonym do kształtu Ω.

B. Uogólnienia dla funkcji meromorficznych z traktami logarytmicznymi

Metody stosowane w dowodach twierdzeń 1 i 2 wykorzystywały logarytmiczną zamianę zmiennych. Konstruowaliśmy odpowiednie zbiory niezmiennicze złożone z punktów, które pozostają w trakcie logarytmicznym T pod działaniem iteracji f. Nie miał przy tym znaczenia fakt, jak funkcja f zachowuje się poza T, ani nawet czy jest zdefiniowana poza T. Twierdzenia 1 i 2 mogą być zatem sformułowane w ogólniejszym kontekście, w którym założenie o klasie $\mathcal{B}$ zostanie zastąpione założeniem o istnieniu traktów logarytmicznych.
Niech $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ będzie funkcją meromorficzną. Nieograniczony obszar jednospójny $T \subset \mathbb{C}$, o brzegu kawałkami gładkim i taki, że $\mathbb{C} \setminus T$ jest nieograniczony, nazywa się *traktem logarytmicznym* dla f, jeśli f jest holomorficzna na T, ciągła na $\overline{T}$ oraz jeśli istnieje $R > 0$ takie, że $f : T \to \Delta_R$ jest nakryciem uniwersalnym.

W pracach [R1] i [R2] zawarliśmy następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3. *Wymiar hiperboliczny zbioru Julii dla dowolnej funkcji meromorficznej z traktem logarytmicznym jest większy od* 1*. W szczególności wymiar Hausdorffa zbioru punktów o ograniczonych orbitach w zbiorze Julii jest większy od* 1.

Twierdzenie 4. *Niech f będzie funkcją meromorficzną z traktem logarytmicznym T. Załóżmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $r_\varepsilon > 0$ takie, że* (1) *zachodzi dla $z \in T$. Niech*

$$I(f,T) = \{z \in T : f^n(z) \in T \textit{ dla dowolnego } n \in \mathbb{N} \textit{ i } f^n(z) \to \infty \textit{ przy } n \to \infty\}.$$

Wówczas

$$\dim_H I(f,T) \geq 1 + \frac{1}{q}.$$

Powyższe twierdzenia stosują się między innymi do funkcji meromorficznych ze skończoną ilością biegunów, dla których zbiór skończonych osobliwości funkcji odwrotnej jest ograniczony. Natomiast, jak wykazali Kotus i Urbański w [35] i [37], dla funkcji meromorficznych z nieskończoną liczbą biegunów wymiar Hausdorffa zbioru Julii może być mniejszy od 1.

C. Wymiar Hausdorffa zbiorów Julii dla funkcji całkowitych spoza klasy $\mathcal{B}$

W 1987 roku McMullen [42] udowodnił twierdzenie mówiące, że wymiar Hausdorffa zbioru Julii dla rodziny funkcji eksponencjalnych $f(z) = \lambda \exp(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, jest równy 2 . McMullen udowodnił najpierw ten rezultat dla zbioru punktów uciekających, a następnie wykazał, że dla rozważanych funkcji zbiór punktów uciekających zawarty jest w zbiorze Julii.

Twierdzenie McMullena doczekało się licznych uogólnień dla funkcji całkowitych, jednakże wszystkie te uogólnienia dotyczą funkcji całkowitych z klasy $\mathcal{B}$. Dla takich funkcji f mamy $I(f) \subset \mathcal{J}(f)$, a więc, tak jak w dowodzie McMullena, przy szacowaniu wymiaru zbiór $\mathcal{J}(f)$ można zastąpić zbiorem $I(f)$.

Znanym uogólnieniem rezultatu McMullena jest twierdzenie udowodnione niezależnie przez Barańskiego i Schuberta [4, 57] mówiące, że dla dowolnej funkcji całkowitej f skończonego rzędu z klasy $\mathcal{B}$ wymiar Hausdorffa $\mathcal{J}(f)$ jest równy 2. Okazuje się [61], że założenia o skończonym rzędzie nie można pominąć i tu w sposób naturalny pojawia się pytanie, na ile istotne jest założenie o klasie $\mathcal{B}$. Problem ten jest interesujący nie tylko w aspekcie uogólnienia wcześniejszych wyników na szerszą klasę funkcji, ale również ze względu na konieczność wprowadzenia nowych technik, które w pewnym sensie zastąpią narzędzia związane z logarytmiczną zamianą zmiennych.

W pracy [R3] rozważamy funkcje całkowite, których wzrost jest dostatecznie *regularny*, tzn. funkcje f, dla których istnieją stałe $A, B, C, r_0 > 1$ takie, że

$$A \log M(r, f) \leq \log M(Cr, f) \leq B \log M(r, f) \quad \text{dla } r \geq r_0, \tag{3}$$

gdzie $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Warunek (3) spełniony jest w szczególności wtedy, gdy istnieją $c, \rho > 0$ takie, że $\log M(r, f) \sim cr^\rho$ przy $r \to \infty$, a więc miedzy innymi dla funkcji o *całkowicie regularnym wzroście* w sensie Pflugera [39]. Jak pokazuje klasyczny przykład Fatou, $f(z) = z + 1 + e^{-z}$ [28] , dla funkcji spełniających warunek (3) punkty uciekające nie muszą należeć do zbioru Julii.

Główny wynik pracy [R3] jest następujacy:

Twierdzenie 5. *Niech f będzie funkcją całkowitą spełniającą warunek* (3)*. Wówczas*

$$\dim_H(I(f) \cap \mathcal{J}(f)) = 2.$$

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystujemy klasyczną technikę McMullena szacowania wymiaru Hausdorffa nieskończonego przecięcia „zagnieżdżających się" rodzin zbiorów [42]. Główna trudność polega na skonstruowaniu zbioru $X \subset I(f) \cap \mathcal{J}(f)$, do którego tę technikę można zastosować.

Niech $A(R)$ będzie pierścieniem $\{z \in \mathbb{C} : \ R \leq |z| \leq 2R\}$. Opierając się na twierdzeniu Ahlforsa o wyspach, zastosowanym do funkcji $\log f$, znajdujemy w pierścieniu $A(R_0)$, dla ustalonego R_0, rodzinę dysków $D(a_i, t)$ o takim samym promieniu, z których każdy zawiera podzbiór V_i przekształcany przez f na pierścień $A(|f(a_i)|)$. Istotnym elementem tej konstrukcji jest wykazanie, że dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ zbiór

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \ \alpha_1 \log M(|z|, f) \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \alpha_2 \log M(|z|, f) \right\}$$

ma dodatnią gęstość w pierścieniu $A(R) = \{z \in \mathbb{C}: \ R < |z| < 2R\}$, dla dostatecznie dużych R, która może być oszacowana z dołu niezależnie od R (przez gęstość zbioru A w zbiorze B rozumiemy iloraz $\frac{\lambda(A\cap B)}{\lambda(B)}$, gdzie λ oznacza miarę Lebesguea w $\mathbb{R}^2$). Rezultat ten pozwala stwierdzić, że suma zbiorów V_i stanowi istotną część wyjściowego pierścienia $A(R_0)$. Konstrukcję tę powtarzamy w każdym z pierścieni $f(V_i) = A(|f(a_i)|)$ i dalej postępujemy indukcyjnie. Biorąc odpowiednie przeciwobrazy otrzymujemy rodzinę zbiorów $\mathcal{E}_k$ w $A(R_0)$, z których każdy jest przekształcany przez f^k na pewien pierścień $A(R_k)$ dla R_k znacznie większego od R_{k-1}. Dowodzimy następnie, że $X = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_k$ ma maksymalny wymiar Hausdorffa. Z samej konstrukcji zbioru X wynika, że składa się on tylko z punktów uciekających. Natomiast do wykazania, że X jest podzbiorem zbioru Julii wykorzystujemy rezultat Zhenga [66] mówiący, że funkcje spełniające warunek (3) nie mają wielospójnych składowych Fatou.

D. Spójność zbiorów Julii dla funkcji meromorficznych i słabo odpychające punkty stałe

Spójność zbiorów Julii dla funkcji meromorficznych okazuje się ściśle związana z istnieniem słabo odpychających punktów stałych. Punkt stały z_0 przekształcenia holomorficznego f nazywa się *słabo odpychający*, jeśli $|f'(z_0)| > 1$ lub $f'(z_0) = 1$ (przy standardowym rozszerzeniu dla $z_0 = \infty$ w przypadku funkcji wymiernej).

Już w 1919 roku Fatou [27] udowodnił, że każda funkcja wymierna stopnia większego niż 1 ma co najmniej jeden słabo odpychający punkt stały w $\widehat{\mathbb{C}}$. W 1990 roku Shishikura [58] wykazał, że jeśli f jest funkcją wymierną, której zbiór Julii jest niespójny, to f ma co najmniej dwa słabo odpychające punkty stałe w $\widehat{\mathbb{C}}$. Dla funkcji przestępnych sytuacja jest bardziej skomplikowana; takie funkcje mogą w ogóle nie mieć punktów stałych. Od wczesnych lat 90-tych podejmowano próby odpowiedzi na pytanie:

Czy każda funkcja meromorficzna przestępna z niespójnym zbiorem Julii ma co najmniej jeden słabo odpychający punkt stały?

Główną motywacją badania związku pomiędzy spójnością zbioru Julii a istnieniem słabo odpychających punktów stałych był znany otwarty problem spójności zbioru Julii dla metody Newtona

$$N_g(z) = z - \frac{g(z)}{g'(z)}$$

znajdowania zer funkcji całkowitej $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dynamiczne własności metody Newtona, zwłaszcza dla wielomianów, przyciągały wiele zainteresowania w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat [40, 41, 43, 44, 45, 54, 64]. Badanie topologicznych własności zbioru Julii dla metody Newtona jest interesujące nie tylko z punktu widzenia dynamiki holomorficznej, ale również ze względu na ciekawe zastosowania numeryczne [29].

Zarówno dla g będącego wielomianem, jak i funkcją całkowitą poszukiwanie pierwiastków g metodą Newtona prowadzi do iterowania funkcji meromorficznej N_g, której punkty stałe w $\mathbb{C}$ odpowiadają zerom funkcji g. Wszystkie punkty stałe N_g w $\mathbb{C}$ są przyciągające. Jeśli g jest wielomianem stopnia co najmniej 2, to N_g jest funkcją wymierną, dla której $z_0 = \infty$ jest odpychającym punktem stałym (tzn. $|f'(z_0)| > 1$). Innymi słowy, funkcja wymierna N_g pochodząca od metody Newtona dla wielomianów ma tylko jednen słabo odpychający punkt stały. Zatem bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia Shishikury [58] jest spójność zbioru Julii dla metody Newtona zastosowanej do wielomianu.

Jeśli g jest funkcją całkowitą przestępną, to N_g jest funkcją meromorficzną przestępną (za wyjątkiem przypadku, gdy g jest postaci $P \exp Q$, gdzie P i Q są wielomianami - wówczas N_g jest funkcją wymierną), której wszystkie punkty stałe są przyciągające. Zatem twierdząca odpowiedź na postawione wyżej pytanie oznacza spójność zbioru Julii dla metody Newtona dla funkcji całkowitej przestępnej.

Badanie spójności zbioru Julii sprowadza się do badania jednospójności wszystkich składowych jego dopełnienia, czyli wszystkich składowych zbioru Fatou. Wymaga to rozważenia kilku przypadków: dla każdego typu składowej Fatou U należy wykazać, że jeśli U jest wielospójna, to f ma słabo odpychający punkt stały. Mimo, że schemat ten wydaje się taki sam jak dla funkcji wymiernych, dowód Shishikury nie przenosi się bezpośrednio na przypadek funkcji przestępnych z powodu braku zwartości, istnienia wartości asymptotycznych i nowych typów składowych Fatou (które nie pojawiają się w przypadku wymiernym).

Przypadek dziedzin błądzących rozważany był przez Bergweilera i Terglane'a w [18], natomiast przypadki basenów przyciągania okresowych ścieków (czyli punktów przyciągających) i punktów parabolicznych były tematem prac Jarque, Fagelli i Taixésa [25, 26]. Istnienie punktów słabo odpychających dla funkcji meromorficznych z wielospójną dziedziną Bakera lub pierścieniem Hermana, a więc w szczególności jednospójność dziedzin Bakera dla metody Newtona, pozostawały otwartym problemem formułowanym m.in. w pracach Bergweilera, Buffa, Rückerta, Mayera i Schleichera [14, 20, 41, 54].

W pracy [R4] rozwiązaliśmy ten problem dowodząc następujących twierdzeń:

Twierdzenie 6. *Niech f będzie funkcją meromorficzną przestępną z wielospójną okresową dziedziną Bakera. Wówczas f ma co najmniej jeden słabo odpychający punkt stały.*

Twierdzenie 7. *Niech f będzie funkcją meromorficzną przestępną z cyklem pierścieni Hermana. Wówczas f ma co najmniej jeden słabo odpychający punkt stały.*

Powyższe twierdzenia wraz z wcześniejszymi wynikami pozwoliły odpowiedzieć twierdząco na postawione na początku pytanie i zamknąć dowód następującego ogólnego twierdzenia:

Twierdzenie 8. *Każda funkcja meromorficzna przestępna z niespójnym zbiorem Julii ma co najmniej jeden słabo odpychający punkt stały.*

Bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 8 jest spójność zbioru Julii dla metody Newtona:

Twierdzenie 9. *Jeśli g jest funkcją całkowitą przestępną to zbiór Julii dla metody Newtona N_g jest spójny.*

Główną przeszkodą w rozszerzeniu wcześniejszych wyników na przypadek dziedzin Bakera był problem istnienia tzw. zbiorów pochłaniających, o których piszemy szerzej w kolejnym podrozdziale. Zasadnicza część dowodu twierdzenia 6 polega na wykazaniu, że w każdej dziedzinie Bakera można skonstruować zbiór pochłaniający:

Twierdzenie 10. *Niech $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ będzie funkcją meromorficzną i niech U będzie okresową dziedziną Bakera o okresie p taką, że $f^{pn} \to \infty$ przy $n \to \infty$. Wówczas istnieje obszar $W \subset U$ o następujących własnościach (poniżej rozważamy domknięcia w $\mathbb{C}$):*

(a) $\overline{W} \subset U$,

(b) $f^{np}(\overline{W}) = \overline{f^{np}(W)} \subset f^{(n-1)p}(W)$ *dla dowolnego* $n \geq 1$,

(c) $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{np}(\overline{W}) = \emptyset$,

(d) *W jest pochłaniający w U dla f^p, tzn. dla dowolnego zwartego zbioru $K \subset U$ istnieje $n = n(K) \geq 0$, takie, że $f^{np}(K) \subset W$.*

W dowodach twierdzeń 6 i 7 rozważamy obrazy krzywej γ otaczającej biegun funkcji f i rozwijamy ogólne techniki, które pozwalają stwierdzić istnienie słabo odpychających punktów stałych przy pewnych założeniach kombinatorycznych, to znaczy w zależności od konfiguracji kolejnych obrazów krzywej γ. Otrzymane przez nas rezultaty stanowią uogólnienie wyników Shishikury, Bergweilera i Terglane'a [18, 58] i okazują się użyteczne w nieco szerszym kontekście, umożliwiają bowiem „ujednolicenie" dowodu spójności zbioru Julii dla metody Newtona N_g tj. wykazanie istnienia punktów słabo odpychających niezależnie od typu rozważanej składowej Fatou i niezależnie od tego, czy g jest wielomianem, czy funkcją całkowitą [8].

E. Zbiory pochłaniające w niezmienniczych dziedzinach Bakera

Twierdzenie 10 (o istnieniu dziedzin pochłaniających w dziedzinach Bakera) jest wnioskiem z naszego ogólniejszego wyniku, który jest rozszerzeniem znanego rezultatu Cowena [21] o istnieniu dziedzin pochłaniających dla holomorficznych przekształceń obszarów jednospójnych w siebie.

Niech U będzie obszarem hiperbolicznym w $\mathbb{C}$ i niech $f : U \to U$ będzie przekształceniem holomorficznym bez punktów stałych w U (w szczególności U może być dziedziną Bakera). Rozważmy nakrycie uniwersalne $\pi : \mathbb{H} \to U$, gdzie $\mathbb{H}$ oznacza prawą półpłaszczyznę zespoloną, oraz podniesienie $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ przekształcenia f. Wówczas g nie ma punktów stałych w $\mathbb{H}$ i zgodnie z twierdzeniem Denjoy-Wolffa iteracje g zbiegają niemal jednostajnie do pewnego punktu ζ na brzegu $\mathbb{H}$ w $\widehat{\mathbb{C}}$. Można założyć, że $\zeta = \infty$ (składając g z przekształceniem Möbiusa).

Twierdzenie Cowena mówi, że każde holomorficzne przekształcenie $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ bez punktów stałych posiada jednospójną dziedzinę pochłaniającą $V \subset \mathbb{H}$, na której g jest konforemnie sprzężone z przekształceniem Möbiusa $S : \Omega \to \Omega$, przy czym zachodzi jeden z trzech przypadków

(1) $\Omega = \mathbb{H}$, $\quad S(\omega) = a\omega$ dla pewnego $a > 1$ (typ hiperboliczny)

(2) $\Omega = \mathbb{H}$, $\quad S(\omega) = \omega \pm i$ (typ paraboliczny)

(3) $\Omega = \mathbb{C}$, $\quad S(\omega) = \omega + 1$ (typ podwójnie paraboliczny).

Opierając się na twierdzeniu Cowena, w pracy [R4] udowodniliśmy, że jeśli U jest dowolnym obszarem hiperbolicznym w $\mathbb{C}$ i $f : U \to U$ jest przekształceniem holomorficznym takim, że $f^n \to \infty$ przy $n \to \infty$, to dla dowolnego $z \in U$ i dla dowolnego ciągu liczb dodatnich r_n zbieżnego do nieskończoności istnieje obszar $W \subset U$ o następujących własnościach:

(a) $W \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_U(f^n(z), r_n)$, gdzie $\mathcal{D}_U(f^n(z), r_n)$ oznacza dysk o środku w $f^n(z)$ i promieniu r_n w metryce hiperbolicznej w U,

(b) $\overline{W} \subset U$ oraz $f^n(\overline{W}) = \overline{f^n(W)} \subset f^{n-1}(W)$ dla dowolnego $n \geq 1$,

(c) $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\overline{W}) = \emptyset$,

(d) W jest pochłaniający w U dla f.

Dowód tego rezultatu polegał na skonstruowaniu odpowiedniego zbioru pochłaniającego dla przekształcenia S, którego istnienie gwarantuje twierdzenie Cowena. Bezpośrednim wnioskiem z otrzymanego wyniku jest twierdzenie 10.

Zgodnie z twierdzeniem 10 zawsze można skonstruować dziedzinę pochłaniającą w dziedzinie Bakera, choć nie musi być ona jednospójna (jak wykazał König [34], w dziedzinach Bakera jednospójne dziedziny pochłaniające mogą nie istnieć). Badania nad strukturą dziedzin Bakera, które rozpoczęliśmy w pracy [R4] kontynuowaliśmy w kolejnej wspólnej pracy [R5] podejmując między innymi próbę odpowiedzi pytanie: jakie są warunki na f, aby istniała jednospójna dziedzina pochłaniająca w dziedzinie Bakera?

Nasze badania rozpoczęliśmy od szczegółowej analizy typów przekształcenia f zgodnie z opisaną wyżej klasyfikacją Cowena. Z własności nakrycia uniwersalnego wynika, że z dokładnością do konforemnego sprzężenia, S nie zależy od wyboru π ani g, a więc i typ S nie zależy ani od π ani od g. Można zatem zdefiniować *typ przekształcenia* f jako typ przekształcenia S z twierdzenia Cowena dla dowolnego podniesienia f. W pracy [R5] podajemy pełną charakteryzację typu podwójnie parabolicznego w terminach dynamicznych własności przekształcenia f, a dokładniej w terminach odległości hiperbolicznej i euklidesowej pomiędzy kolejnymi iteracjami f (poniżej ϱ_U oznacza odległość hiperboliczną w U):

Twierdzenie 11. *Niech U będzie obszarem hiperbolicznym w $\mathbb{C}$ i niech $f : U \to U$ będzie przekształceniem holomorficznym bez punktów stałych i takim, że brzeg U w $\widehat{\mathbb{C}}$ nie zawiera izolowanych punktów stałych (tzn. punktów ζ, dla których można rozszerzyć f holomorficznie tak, aby $f(\zeta) = \zeta$). Wówczas następujące warunki są równoważne*

(i) *f jest typu podwójnie parabolicznego,*

(ii) $\varrho_U(f^{n+1}(z), f^n(z)) \to 0$ *przy* $n \to \infty$ *dla pewnego* $z \in U$,

(iii) $|f^{n+1}(z) - f^n(z)| / \operatorname{dist}(f^n(z), \partial U) \to 0$ *przy* $n \to \infty$ *dla pewnego* $z \in U$.

Metody dowodu powyższego twierdzenia opierają się na oszacowaniach metryki hiperbolicznej w U. W przypadku pozostałych typów przekształceń metody te dają warunek wystarczający na to, aby f było typu hiperbolicznego: jeśli f spełnia założenia twierdzenia 11 oraz

$$\inf_{z\in U} \lim_{n\to\infty} \varrho_U(f^{n+1}(z), f^n(z)) > 0,$$

to f jest typu hiperbolicznego. Interesującym problemem, który nadal pozostaje nierozstrzygnięty, jest pytanie, czy powyższy warunek jest konieczny. Pozytywna odpowiedź na to pytanie pozwoliłaby na uzyskanie pełnej charakteryzacji typu f w terminach jego dynamicznych własności.

W pracy [R5] podajemy warunki, przy których istnieje jednospójna dziedzina pochłaniająca dla f:

Twierdzenie 12. *Niech U będzie obszarem hiperbolicznym $\mathbb{C}$ i niech $f : U \to U$ będzie przekształceniem holomorficznym takim, że, $f^n(z) \to \infty$ przy $n \to \infty$ dla $z \in U$. Załóżmy, że ∞ nie jest izolowanym punktem brzegu U w $\widehat{\mathbb{C}}$. Jeśli f jest typu podwójnie parabolicznego, to istnieje jednospójny zbiór pochłaniający $W \subset U$ dla f.*

Założenie, że ∞ nie jest izolowanym punktem brzegu U w $\widehat{\mathbb{C}}$ jest istotne. W dowodzie powyższego twierdzenia pokazujemy najpierw, że istnienie jednospójnego zbioru pochłaniającego jest równoważne warunkowi, że dla dowolnej krzywej $\gamma \subset U$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $f^n(\gamma)$ jest ściągalna w U. Następnie, opierając się na wcześniejszym twierdzeniu 11 dowodzimy, że jeśli istnieje krzywa, dla której $f^n(\gamma)$ nie są ściągalne dla żadnego n, to U zawiera nakłute otoczenie ∞ w $\widehat{\mathbb{C}}$.

Okazuje się, że dla pozostałych dwóch typów przekształceń f jednospójne zbiory pochłaniające mogą nie istnieć.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Publikacje wchodzące w skład rozprawy doktorskiej:

[A1] B. Karpińska, *Area and Hausdorff dimension of the set of accessible points of the Julia set of $\lambda \exp z$ and $\lambda \sin z$*, Fund. Math. 159 (1999), 269–287 (w spisie literatury pozycja [30])

[A2] B. Karpińska, *Hausdorff dimension of the hairs without endpoints for $\lambda exp z$*, C. R. Acad. Sci. Paris, 328, Serie I, (1999), 1039–1044 (w spisie literatury pozycja [31])

Publikacje po doktoracie spoza rozprawy habilitacyjnej:

[A3] B. Karpińska, *On the accessible points in the Julia sets of some entire functions*, Fund. Math. 180 (2003), 89–98 (w spisie literatury pozycja [32])

[A4] B. Karpińska, M. Urbański, *How points escape to infinity under exponential maps*, J. London Math.Soc. (2) 73 (2006), 141–156 (w spisie literatury pozycja [33])

[A5] K. Barański, B. Karpińska, *Coding trees and boundaries of attracting basins for some entire maps*, Nonlinearity 20 (2007), 391–415 (w spisie literatury pozycja [9])

[A6] K. Barański, B. Karpińska, A. Zdunik, *Dimension properties of the boundaries of exponential basins*, Bull. London Math. Soc. 42 (2010), 210–220 (w spisie literatury pozycja [11])

[A7] K. Barański, B. Karpińska, A. Zdunik, *Bowen's formula for meromorphic functions*, Ergod. Theory and Dynam. Sys. 32 (2012), 1165–1189 (w spisie literatury pozycja [12])

[A8] K. Barański, N. Fagella, X. Jarque, B. Karpińska, *Accesses to ininity from Fatou components*, ukaże się w Trans. Amer. Math. Soc.,
http://www.ams.org/cgi-bin/mstrack/accepted_papers/tran
(w spisie literatury pozycja [6])

Artykuły spoza rozprawy habilitacyjnej dotyczą kilku aspektów dynamiki funkcji całkowitych i meromorficznych przestępnych, takich jak:

- struktura zbioru Julii i jego podzbiorów dla rodziny funkcji eksponencjalnych,
- własności brzegowe przekształceń całkowitych i meromorficznych na jednospójnych niezmienniczych składowych Fatou,
- formalizm termodynamiczny funkcji meromorficznych.

Prace [A1], [A2], [A4] oraz [A6] dotyczą dynamiki funkcji eksponencjalnych postaci $E_\lambda(z) = \lambda \exp z$, gdzie λ jest zespolonym niezerowym parametrem. Jak wykazali Devaney i Krych w [22], jeśli E_λ ma punkt stały przyciągający (a więc np. dla $\lambda \in (0, \frac{1}{e})$), to zbiór Julii $\mathcal{J}(E_\lambda)$ jest bukietem Cantora krzywych. Każdemu punktowi zbioru $\mathcal{J}(E_\lambda)$ można przypisać jednoznacznie ciąg liczb całkowitych $s(z) = (s_0, s_1, ...)$, nazywany *kodem*, w następujący sposób:

$$s_k = j \quad \iff \quad E_\lambda^k(z) \in \{z \in \mathbb{C} : \ (2j-1)\pi \le \mathrm{Im} z < (2j+1)\pi\}, \quad \text{gdzie } j \in \mathbb{Z}.$$

Devaney i Krych [22] udowodnili, że każdemu ciągowi liczb całkowitych $s = (s_0, s_1, ..)$ spełniającemu pewien warunek dopuszczalności odpowiada punkt $z \in \mathcal{J}(E_\lambda)$ o tym kodzie. Co więcej, zbiór punktów o kodzie s tworzy krzywą X_s: istnieje ciągłe odwzorowanie $\varphi_s : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ takie, że $\varphi_s([0, +\infty)) = X_s$ oraz $\varphi_s(t) \to \infty$ przy $t \to \infty$. Krzywa X_s nazywa się *włosem*, a punkt $\varphi_s(0)$ – *końcem włosa*. Zbiór $\mathcal{J}(E_\lambda)$ jest sumą krzywych X_s przy sumowaniu po wszystkich kodach dopuszczalnych s, przy czym końce włosów stanowią gęsty podzbiór zbioru Julii.

McMullen wykazał w [42], że wymiar Hausdorffa $\mathcal{J}(E_\lambda)$ jest równy 2. W pracy [A1] dowodzimy, że wymiar Hausdorffa zbioru końców tych krzywych, czyli zbiór końców włosów także jest maksymalny możliwy, czyli równy 2, co oznacza, że jest „bardzo gęsty" w zbiorze Julii. Natomiast w [A2] pokazujemy, że, nieoczekiwanie, suma krzywych X_s bez końców stanowi znacznie mniejszy w sensie wymiaru podzbiór zbioru Julii; wymiar Hausdorffa włosów bez końców jest równy 1, czyli minimalny możliwy. Wyniki te zostały nazwane w literaturze

„paradoksem wymiaru” i były uogólniane m.in. przez Schleichera, Barańskiego, Bergweilera i Eremenkę [4, 13, 15, 56].

W [A1] wykazaliśmy także, że dla funkcji $S_\lambda(z) = \lambda \sin z$, gdzie $\lambda \in (0,1)$ zbiór końców włosów ma dodatnią miarę Lebesgue'a.

W [A4] badamy strukturę zbioru punktów uciekających do nieskończoności pod działaniem przekształceń E_λ dla dowolnego parametru λ. Interesuje nas zależność wymiaru Hausdorffa od szybkości wzrostu kodów. Jak wynika z dowodów rezultatów z [A1] i [A2] punkty uciekające, których kody rosną supereksponencjalnie szybko stanowią podzbiór zbioru $I(E_\lambda)$ o wymiarze Hausdorffa 2, natomiast podzbiór $I(E_\lambda)$ złożony z punktów o kodach ograniczonych ma wymiar bliski 1. W pracy [A4], dla dowolnie wybranej liczby q z przedziału $[1,2]$ podajemy naturalny warunek na szybkość wzrostu kodów, przy którym wymiar Hausdorffa zbioru punktów o kodach spełniających ten warunek jest równy q.

W pracy [A6] opisujemy inne paradoksy związane z wymiarem dla hiperbolicznych funkcji eksponencjalnych z wieloma składowymi Fatou. Rozważamy przekształcenia E_λ dla tych parametrów λ, dla których E_λ ma cykl okresowy przyciągający o okresie $p \geq 1$. Wówczas zbiór Julii $\mathcal{J}(E_\lambda)$ jest brzegiem (całego) basenu ścieku dla tego cyklu, a jego wymiar Hausdorffa jest równy 2 [42]. Dla $p = 1$ basen przyciągania składa się z jednej jednospójnej składowej U i $\dim_H(\partial U) = 2$. Jak wynika z dowodu McMullena [42], zbiór punktów uciekających stanowi „największy”, w sensie wymiaru, podzbiór brzegu basenu. Urbański i Zdunik [65] wykazali, że punkty nieuciekające w ∂U mają wymiar ostro mniejszy od 2. Można się spodziewać, że podobne zjawisko powinno zachodzić w przypadku cyklu przyciągającego o okresie $p > 1$. Okazuje się jednak, że dla $p > 1$ sytuacja jest w pewnym sensie odwrotna. W [A6] dowodzimy, że dla dowolnej składowej U basenu cyklu przyciągającego o okresie $p > 1$, zbiór punktów uciekających zawartych w ∂U ma wymiar Hausdorffa równy 1. Punkty nieuciekające stanowią zbiór o wymiarze Hausdorffa ostro większym od 1, przy czym wymiar ten jest równy wymiarowi ∂U. Tak więc, inaczej niż w przypadku $p = 1$, o wymiarze „decydują” punkty nieuciekające. W [A6] dowodzimy ponadto, że brzeg każdej składowej ma wymiar ostro mniejszy niż 2 (mimo, że wymiar Hausdorffa brzegu całego basenu nadal jest równy 2).

Prace [A3] i [A5] dotyczą struktury zbioru Julii dla funkcji całkowitych z klasy $\mathcal{B}$ z jedną całkowicie niezmienniczą składową Fatou U będącą basenem przyciągania punktu stałego. W tej sytuacji można zdefiniować kody dla punktów ze zbioru Julii numerując trakty logarytmiczne i dziedziny fundamentalne w tych traktach. W pracy [A3] dowodzimy, że przy pewnych dodatkowych założeniach geometrycznych, dla dowolnego kodu s istnieje *punkt osiągalny* z basenu U o tym kodzie w $\mathcal{J}(f) \cup \{\infty\}$ (punkt $z \in \partial U$ nazywa się osiągalny z U, jeśli istnieje krzywa $\gamma : [0,1) \to U$ taka, że $\lim_{t\to 1^-} \gamma(t) = z$). Wynik ten oparty jest na technice *drzew kodujących*, które powstają przez połączenie wybranego punktu $z_0 \in U$ z punktami z $f^{-1}(z_0)$ krzywymi zawartymi w U i przeciąganie tych krzywych za pomocą odpowiednich gałęzi f^{-n}. Abstrakcyjna teoria drzew kodujących rozwijana była przez Przytyckiego, Urbańskiego i Zdunik w serii prac [46, 47, 50, 52] i stosowana była dla przekształceń wymiernych na sferze Riemanna. W kontekście funkcji całkowitych przestępnych, Devaney i Goldberg wykazali, że dla przekształceń E_λ z niezmienniczym basenem punktu stałego przyciągającego wszystkie gałęzie drzewa kodującego są zbieżne w $\widehat{\mathbb{C}}$. Praca [A3] jest uogólnieniem tego wyniku.

Technikę drzew kodujących stosujemy także w pracy [A5], w której kontynuujemy badanie geometrycznej i kombinatorycznej struktury zbioru Julii dla funkcji z klasy $\mathcal{B}$ z jedną składową Fatou. Rozważamy funkcje całkowite, dla których zbiór $\mathrm{Sing}(f^{-1})$ zawarty jest w zwartym podzbiorze basenu przyciągania B punktu stałego. Podajemy warunek na dopuszczalność kodu (tzn. warunek, przy którym kodowi s odpowiada punkt w zbiorze Julii o tym kodzie) w terminach zbieżności gałęzi drzewa kodującego i szybkości wzrostu kodów. Badamy także własności brzegowe przekształcenia Riemanna $\varphi : \mathbb{D} \to B$ (jak wynika z [24], dla funkcji całkowitych $f \in \mathcal{B}$ okresowe składowe Fatou są jednospójne). Dowodzimy w szczególności, że na gęstym nieprzeliczalnym podzbiorze $\partial\mathbb{D}$ przekształcenie Riemanna φ ma granicę równą ∞.

W pracy [A8] badamy związek dynamiki przekształcenia meromorficznego $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ na jednospójnej niezmienniczej składowej U zbioru Fatou z własnościami brzegowymi przekształcenia Riemanna $\varphi : \mathbb{D} \to U$. Rozważamy tzw. *korytarze do nieskończoności* w U (przy założeniu, że ∞ jest punktem osiągalnym z U), czyli klasy homotopii krzywych $\gamma : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}}$ o ustalonym początku $v_0 \in U$, takich, że $\gamma([0,1)) \subset U$, $\gamma(0) = v_0$, $\gamma(1) = \infty$. Jednym z wyników pracy [A8] jest odpowiedniość pomiędzy niezmienniczymi korytarzami do nieskończoności w U, słabo odpychającymi punktami stałymi f i brzegowymi punktami stałymi odpowiadającej funkcji wewnętrznej na $\mathbb{D}$ (czyli funkcji $h = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$, gdzie $\varphi : \mathbb{D} \to U$ jest przekształceniem Riemanna). Główną motywacją tej pracy jest próba zbadania struktury zbioru Julii w otoczeniu nieskończoności dla przekształceń Newtona (metody znajdowania zer funkcji całkowitych g):

$$N(z) = z - \frac{g(z)}{g'(z)}.$$

Opierając się na wcześniej wykazanej odpowiedniości wyznaczamy liczbę niezmienniczych korytarzy do nieskończoności dla przekształceń Newtona.

Praca [A7] dotyczy formalizmu termodynamicznego dla funkcji meromorficznych. Metody formalizmu termodynamicznego rozwijane przez Ruelle'a, Bowena i Waltersa w latach 70-tych ubiegłego wieku dostarczyły wielu użytecznych narzędzi do badania struktury zbiorów Julii i jego podzbiorów dla funkcji wymiernych na sferze Riemanna. W szczególności, znany wzór Bowena pozwala wyznaczyć wymiar Hausdorffa konforemnego repellera X (a więc np. zbioru Julii dla hiperbolicznych punkcji wymiernych) jako jedyne miejsce zerowe funkcji: $t \mapsto P(f|_X, t)$, gdzie

$$P(f|_X, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{w \in f^{-n}(z) \cap X} |(f^n)'(w)|^{-t}, \quad \text{gdzie } z \in X,$$

nazywanej ciśnieniem topologicznym dla potencjału $-t \ln |f'|^t$.
Próby przeniesienia metod formalizmu termodynamicznego na przypadek funkcji meromorficznych przestępnych napotykają na wiele trudności, w szczególności ciśnienie topologiczne może być nieskończone. Pierwsze wyniki dotyczące wzoru Bowena dla pewnych klas okresowych funkcji meromorficznych otrzymane były przez Barańskiego, Kotus i Urbańskiego [3], [36]. W [65] Urbański i Zdunik stworzyli teorię formalizmu termodynamicznego dla hiperbolicznych funkcji eksponencjalnych $E_\lambda(z) = \lambda \exp(z)$ i udowodnili, że wzór Bowena dla takich funkcji ma nową postać: jedyne zero ciśnienia jet równe wymiarowi Hausdorffa tzw. *radialnego zbioru*

Julii $\mathcal{J}_r(E_\lambda)$. Dla funkcji meromorficznej f *radialny zbiór Julli* $\mathcal{J}_r(f)$ definiuje się jako zbiór tych $z \in \mathcal{J}(f)$, dla których istnieje $r = r(z) > 0$ oraz ciąg $n_j \to \infty$ taki, że na kuli o środku w $f^{n_j}(z)$ i promieniu r (w metryce sferycznej) można zdefiniować holomorficzną gałąź f^{-n_j} przeprowadzającą $f^{n_j}(z)$ w z.

W pracy [A7], inspirowanej podejściem Przytyckiego, Rivery-Leteliera oraz Smirnova [48, 49] dowodzimy, że wzór Bowena w nowej postaci zachodzi dla szerokiej klasy funkcji meromorficznych przestępnych. Dowodzimy, że jeśli zbiór $\mathrm{Sing}(f^{-1})$ jest skończony, to ciśnienie jest dobrze zdefiniowane i nie zależy od wyboru punktu $z \in \mathbb{C}$, poza zbiorem o wymiarze Hausdorffa zero. Ponadto wykazujemy, że wymiar Hausdorffa radialnego zbioru Julii dla f jest równy infimum zbioru tych parametrów t, dla których ciśnienie jest niedodatnie. Podobne rezultaty uzyskujemy dla funkcji meromorficznych z klasy $\mathcal{B}$, dla których domknięcie zbioru postsingularnego tzn. sumy trajektorii w przód punktów z $\mathrm{Sing}(f^{-1})$ nie zawiera zbioru Julii, w szczególności dla hiperbolicznych funkcji meromorficznych z klasy $\mathcal{B}$.

6. Referaty wygłoszone na konferencjach naukowych

- *Hausdorff dimension of the set of accessible points of the Julia sets of* $\lambda \exp z$, konferencja *Complex Dynamics and Hyperbolic Geometry*, Centrum Matematyczne im. Stefana Banacha, Warszawa, Polska, 16-28.03.1998,

- *Area and Hausdorff dimension of the set of accessible points of the Julia sets of* $\lambda \exp z$ *and* $\lambda \sin z$, konferencja *Conformal Geometry*, Centre International de Rencontres Mathématiques, Marseille-Luminy, Francja, 24-30.05.1998,

- *Hairs without endpoints for exponential maps*, konferencja *Holomorphic Dynamics*, Anogia, Grecja, 26.06-2.07.1999,

- *How points escape to infinity under the exponential maps*, konferencja *Holomorphic Dynamics*, University of Warwick, Wielka Brytania, 6-11.12.2004,

- *Coding trees in the boundaries of attracting basins for some entire maps*, konferencja *Normal families and Complex Dynamics*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Niemcy, 18-24.02.2007,

- *Coding trees in the boundaries of attracting basins for some entire maps*, konferencja *Conformal Structures and Dynamics. The current state-of-art and perspectives*, University of Warwick, Wielka Brytania, 11-15.06.2007,

- *Accessible points in the boundaries of attracting basins for some entire maps*, konferencja *First Joint International Meeting between the AMS and PTM*, Warszawa, Polska, 31.07-3.08.2007,

- cykl trzech wykładów *Cantor bouquets in the iteration of entire functions and Hausdorff dimension*, konferencja *Topics in Complex Dynamics*, Universitat de Barcelona, Hiszpania, 5-9.11.2007,

- *Hausdorff dimension of the Julia set and growth rate of entire function*, konferencja *Aspects of Transcendental Dynamics*, Jacobs University Bremen, Niemcy, 16-20.06.2008,
- *Hyperbolic dimension of Julia sets of meromorphic maps with logarithmic tracts*, konferencja *Dynamical Systems*, University of North Texas, Denton, USA, 17-23.05.2009,
- *Dimension properties of the boundaries of exponential basins*, konferencja *Conformal Structures and Dynamics. CODY - Third Year Conference.*, Będlewo, Polska, 21-25.09.2009,
- *The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions with regular growth*, konferencja *The Escaping Set in Transcendental Dynamics*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Niemcy, 6-12.12.2009,
- *Thermodynamic formalism for some meromorphic maps*, konferencja *The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, Dresden, Niemcy, 26-29.05.2010,
- *Pressure for non-hyperbolic meromorphic maps*, konferencja Transcendental Dynamics, Centrum Matematyczne im. Stefana Banacha, Warszawa, 8-12.11.2010,
- *Connectivity of Julia sets for meromorphic maps*, konferencja *The role of complex analysis in complex dynamics*, International Centre for Mathematical Sciences, Edinburgh, Wielka Brytania 20-24.05.2013,
- *Pressure for meromorphic maps*, konferencja *Workshop on Holomorpic Dynamics – Maps with essential singularities*, Holbaek, Dania, 3-6.10. 2013,
- *Absorbing domains for holomorphic maps*, konferencja *2015 Joint Meeting AMS EMS SPM*, University of Porto, Portugalia, 10-13.06.2015,
- *Thermodynamic formalism for transcendental maps*, konferencja *Ergodic theory and holomorphic dynamics*, Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics, Wiedeń, Austria, 28.09- 2.10.2015.

7. Wybrane referaty na seminariach

- *Cantor bouquets for exponential maps* Centre de Recerca Matematica, Barcelona, Hiszpania, 1999,
- *Wymiar Hausdorffa końców włosów dla exp(z)*, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 2003,
- *Cantor bouquets for complex exponentials*, Laboratoire de Probabilites, Universite Paris VI, Francja, 2003,
- *Jak punkty uciekają do nieskończoności pod działaniem funkcji eksponencjalnych*, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa, 2004,

- *Bukiety Cantora dla iteracji $\lambda \exp z$*, Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 2005,
- *Wymiar Hausdorffa zbiorów Julii i szybkość wzrostu funkcji całkowitych*, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa, 2008,
- *Hyperbolic dimension of Julia sets for entire maps in class $\mathcal{B}$*, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Niemcy, 2008,
- *Wymiar hiperboliczny zbiorów Julii dla funkcji meromorficznych z traktami logarytmicznymi*, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 2011,
- *Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions*, Universitat de Barcelona, Hiszpania, 2011,
- *Absorbing domains for holomorphic maps*, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa, 2013,
- *Accesses to ininity from Fatou components*, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa, 2015.

8. Wyjazdy w ramach współpracy naukowej

- Centre de Recerca Matematica, Barcelona, Hiszpania (marzec 1999)
- Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI, Francja (maj 2003)
- Institut Henri Poincaré, Paryż, Francja (październik 2003)
- Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Niemcy (listopad 2008)
- Universitat de Barcelona, Hiszpania (wrzesień 2011),
- Universitat de Barcelona, Hiszpania (czerwiec 2014)
- Universitat de Barcelona, Hiszpania (wrzesień 2014)
- Universitat de Barcelona, Hiszpania (kwiecień 2015)
- Universitat de Barcelona, Hiszpania (listopad 2015)

9. Udział w krajowych i międzynarodowych projektach badawczych

- grant KBN Nr 2 P03A 009 17 *Iteracje funkcji holomorficznych II* (1999-2002), wykonawca
- grant KBN Nr 2 P03A 034 25 *Konforemne układy dynamiczne i geometria zbiorów fraktalnych* (2003-2006), wykonawca
- grant MNiSW Nr N N201 0234 33 *Geometryczne i ergodyczne własności układów dynamicznych* (2007-2010), wykonawca

- EU Research Training Network CODY *Conformal Structures and Dynamics* (2007-2010), wykonawca
- grant MNiSW Nr N N201607940 *Geometryczne i ergodyczne własności układów dynamicznych II* (2011-2014), wykonawca
- grant NCN Nr 2012/06/M/ST1/00168 *Własności topologiczne zbiorów niezmienniczych w dynamice przestępnej* (2013-2016), wykonawca
- grant NCN Nr 2014/13/B/ST1/04551 *Metody stochastyczne w teorii gładkich układów dynamicznych* (2015-2018), wykonawca

10. Nagrody i wyróżnienia

- Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej za osiągnięcia naukowe w roku 1999
- Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej za osiągnięcia naukowe w latach 2009-2010
- Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej za wyróżniające prowadzenie zajęć dydaktycznych w roku akademickim 2012/2013
- Złota Kreda (wyróżnienie dla najlepszych nauczycieli akademickich Politechniki Warszawskiej) 2013 oraz 2015

11. Wskaźniki służące do oceny dorobku naukowego

- sumaryczny *impact factor* według listy JCR zgodnie z rokiem opublikowania : **9,9**
(Do wyznaczenia wskaźnika dla pracy [R5] wykorzystano dane z 2014 roku. Podany sumaryczny *impact factor* nie uwzględnia pracy [A8] przyjętej do publikacji.)
- liczba cytowań według bazy *Web of Science*
  - liczba cytowań: **91**
  - liczba cytowań bez autocytowań: **74**
- Indeks Hirscha: **5**

Literatura

[1] I. N. Baker, *The domains of normality of an entire function*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1 (1975), 277–283

[2] I. N. Baker, J. Kotus, and Y. Lü, *Iterates of meromorphic functions*, Ergod. Theory and Dynam. Sys. 8 (1988), 503–507

[3] K. Barański, *Hausdorff dimension and measures on Julia sets of some meromorphic maps*, Fund. Math. 147 (1995), 239–260

[4] K. Barański, *Hausdorff dimension of hairs and ends for entire maps of finite order*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 145 (2008), 719–737

[5] K. Barański, N. Fagella, X. Jarque and B. Karpińska, *On the connectivity of the Julia sets of meromorphic functions*, Invent. Math. 198 (2014), no.3, 591–636

[6] K. Barański, N. Fagella, X. Jarque and B. Karpińska, *Accesses to ininity from Fatou components*, preprint arXiv:1411.5473 (2014), ukaże się w Trans. Amer. Math. Soc.

[7] K. Barański, N. Fagella, X. Jarque and B. Karpińska, *Absorbing sets and Baker domains for holomorphic maps*, J. London Math. Soc. 92 (2015), no. 1, 144–162

[8] K. Barański, N. Fagella, X. Jarque and B. Karpińska, *Connectivity of Julia sets of Newton maps: A unified approach*, preprint arXiv:1501.05488 (2015)

[9] K. Barański and B. Karpińska, *Coding trees and boundaries of attracting basins for some entire maps*, Nonlinearity 20 (2007), 391–415

[10] K. Barański, B. Karpińska and A. Zdunik, *Hyperbolic dimension of Julia sets of meromorphic maps with logarithmic tracts*, Int. Math. Res. Notices 2009, no.4 (2009), 615–624

[11] K. Barański, B. Karpińska and A. Zdunik *Dimension properties of the boundaries of exponential basins*, Bull. London Math. Soc. 42 (2010), 210–220

[12] K. Barański, B. Karpińska and A. Zdunik, *Bowen's formula for meromorphic functions*, Ergod. Theory and Dynam. Sys. 32 (2012), 1165–1189

[13] W. Bergweiler, *Karpińska's paradox in dimension 3*, Duke Math. J. 154 (2010), 599–630

[14] W. Bergweiler, *Newton's method and Baker domains*, J. Difference Equ. Appl. 16 (2010), no. 5-6, 427–432

[15] W. Bergweiler and A. Eremenko, *Dynamics of a higher dimensional analog of the trigonometric functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 36 (2011), 165–175

[16] W. Bergweiler and B. Karpińska, *On the Hausdorff dimension of the Julia set of a regularly growing entire function*, Math. Proc. Cambridge Phil.Soc. 148 (2010), 531–551

[17] W. Bergweiler, B. Karpińska and G. Stallard, *The growth rate of an entire function and the Hausdorff dimension of its Julia set*, J. London Math. Soc. 80 (2009), 680 – 698

[18] W. Bergweiler and N. Terglane, *Weakly repelling fixpoints and the connectivity of wandering domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 1, 1–12

[19] R. Bowen, *Hausdorff dimension of quasicircles*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 50 (1979), 11–25

[20] X. Buff and J. Rückert, *Virtual immediate basins of Newton maps and asymptotic values*, Int. Math. Res. Not. 2006 (2006) , Art. ID 65498, 18

[21] C. Cowen, *Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk*, Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981), no. 1, 69–95

[22] R.L. Devaney and M. Krych, *Dynamics of exp(z)*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 4 (1984), 35-52

[23] A. E. Eremenko, *On the iteration of entire functions*, Dynamical systems and ergodic theory, Banach Center Publications 23, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1989), 339–345

[24] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, *Dynamical properties of some classes of entire functions*, Ann. Inst. Fourier, 42 (1992), 989–1020

[25] N. Fagella, X. Jarque and J. Taixés, *On connectivity of Julia sets of transcendental meromorphic maps and weakly repelling fixed points. I*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 97 (2008), no. 3, 599–622

[26] N. Fagella, X. Jarque and J. Taixés, *On connectivity of Julia sets of transcendental meromorphic maps and weakly repelling fixed points. II*, Fund. Math. 215 (2011), no. 2, 177–202

[27] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. France 47 (1919), 161–271

[28] P. Fatou, *Sur l'itération des fonctions transcendantes entières,* Acta Math. 47 (1926), 337–360

[29] J. Hubbard, D. Schleicher and D. Sutherland, *How to find all roots of complex polynomials by Newton's method*, Invent. Math. 146 (2001), no.1, 1–33

[30] B. Karpińska, *Area and Hausdorff dimension of the set of accessible points of the Julia set of* $\lambda \exp z$ *and* $\lambda \sin z$, Fund. Math. 159 (1999), 269–287

[31] B. Karpińska, *Hausdorff dimension of the hairs without endpoints for* $\lambda expz$, C. R. Acad. Sci. Paris, 328, Serie I, (1999), 1039–1044

[32] B. Karpińska, *On the accessible points in the Julia sets of some entire functions*, Fund. Math. 180 (2003), 89–98

[33] B. Karpińska and M. Urbański, *How points escape to infinity under exponential maps*, J. London Math. Soc. (2) 73 (2006), 141–156

[34] H. König, *Conformal conjugacies in Baker domains*, J. London Math. Soc. (2) 59 (1999), no. 1, 153–170

[35] J. Kotus, *On the Hausdorff dimension of Julia sets of meromorphic functions. I*, Bull. Soc. Math. France 122 (1994), 305–331

[36] J. Kotus and M. Urbański, *Conformal, geometric and invariant measures for transcendental expanding functions*, Math. Ann. 324 (2002), 619–656

[37] J. Kotus and M. Urbański, *Hausdorff dimension and Hausdorff measures of Julia sets of elliptic functions*. Bull. London Math. Soc. **35** (2003), 269–275

[38] J. K. Langley, *On the mutiple points of certain meromorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 355–373

[39] B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1964

[40] A. Manning, *How to be sure of finding a root of a complex polynomial using Newton's method*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 22 (1992), no. 2, 157–177

[41] S. Mayer and D.Schleicher, *Immediate and virtual basins of Newton's method for entire functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), no. 2, 325–336

[42] C. McMullen, *Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 300 (1987), 329–342

[43] C. McMullen, *Families of rational maps and iterative root-finding algorithms*, Ann. of Math. (2) 125, (1987), no. 3, 467–493

[44] C. McMullen, *Braiding of the attractor and the failure of iterative algorithms*, Invent. Math. 91 (1988), no. 2, 259–272

[45] F. Przytycki, *Remarks on the simple connectedness of basins of sinks for iterations of rational maps*, Dynamical systems and ergodic theory (Warsaw, 1986), Banach Center Publ., vol. 23, PWN, Warsaw, 229–235

[46] F. Przytycki, *Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map*, Invent. Math. 80 (1985), 161-179

[47] F. Przytycki, *Riemann map and holomorphic dynamics*, Invent. Math. 85 (1986), 439-455

[48] F. Przytycki, *Conical limit set and Poincaré exponent for iterations of rational functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 2081-2099

[49] F. Przytycki, J. Rivera Letelier and S. Smirnov, *Equality of pressures for rational functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2004), 891–914

[50] F. Przytycki and J. Skrzypczak, *Convergence and pre-images of limit points for coding trees for iterations of holomorphic maps*, Math. Ann. 290 (1991), 425-440

[51] F. Przytycki and M. Urbański, *Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods*, LMS Lecture Note Series 371, Cambridge University Press, 2010

[52] F. Przytycki, M. Urbański and A. Zdunik, *Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps, Part I*, Ann. Math. 130, (1989), 1-40

[53] G. Rottenfußer, J. Rückert, L. Rempe and D. Schleicher, *Dynamic rays of bounded-type entire functions*, Ann. of Math. 171 (2011), no.1, 77-125

[54] J. Rückert and D. Schleicher, *On Newton's method for entire functions*, J. Lond. Math. Soc. (2) 75 (2007), no. 3, 659–676

[55] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 5, Addison-Wesley, Reading, 1978

[56] D. Schleicher, *The dynamical fine structure of iterated cosine maps and a dimension paradox*, Duke Mathematics Journal 136 (2007), no.2, 343–356

[57] H. Schubert, *Über die Hausdorff-Dimension der Juliamenge von Funktionen endlicher Ordnung. Dissertation*, University of Kiel, 2007; http://eldiss.uni-kiel.de/macau/receive/dissertation_diss_00002124

[58] M. Shishikura, *The connectivity of the Julia set and fixed points*, Complex dynamics, A K Peters, Wellesley, MA, 2009, 257-276

[59] G. Stallard, *The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems 11 (1991), 769–777.

[60] G. Stallard, *The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions. II*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 119 (1996), 513–536

[61] G. M. Stallard, *The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions IV*, J. London Math. Soc. (2) 61 (2000), 471–488

[62] D. Sullivan, *Itération des fonctions analytiques complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 294, Serie I, (1982), 301–303

[63] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. of Math. (2), 122 (1985), 401–418

[64] L. Tan, *Branched coverings and cubic Newton maps*, Fund. Math. 154 (1997), no. 3, 207–260

[65] M. Urbański and A. Zdunik, *The finer geometry and dynamics of the hyperbolic exponential family*, Michigan Math. J. 51 (2003), 227–250

[66] J.-H. Zheng, *On multiply-connected Fatou components in iteration of meromorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. 313 (2006), 24–37

Bogusława Karpińska