AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: Michał Ziembowski

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułem rozprawy doktorskiej.

- Doctor of Philosophy, School of Mathematics, University of Edinburgh. 2010.
  Tytuł rozprawy doktorskiej: Right Gaussian rings and related topics.

- Dyplom magistra matematyki, Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Matematyki i Informatyki. 2002.
  Tytuł: Konstrukcje rozszerzeń Galois z zadaną grupą Galois.

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

- Od lutego 2011 - adiunkt, Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych.

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595 ze zm.):

a) tytuł osiągnięcia naukowego,

Algebraiczne własności rozszerzeń nieprzemiennych pierścieni łącznych

b) spis publikacji (autorzy, tytuły, nazwa wydawnictwa, rok wydania),

[H1] Y. Zhou, M. Ziembowski, On clean Laurent series rings, J. Aust. Math. Soc. 95 (2013), 421–427 (w spisie literatury pozycja [72]).

[H2] M. Ziembowski, Laurent series ring over semiperfect ring can not be semiperfect, Comm. Algebra 42 (2014), 664–666 (w spisie literatury pozycja [76]).

[H3] M. Ziembowski, On classical rings of quotients of duo rings, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 919–924 (w spisie literatury pozycja [77]).

[H4] R. Mazurek, M. Ziembowski, On a characterization of distributive rings via saturations and its applications to Armendariz rings and Gaussian rings, Rev. Mat. Iberoam. 30 (2014), 1073–1088 (w spisie literatury pozycja [43]).

[H5] Y. Zhou, M. Ziembowski, Distributive modules and Armendariz modules, J. Math. Soc. Japan 67 (2015), 789–796 (w spisie literatury pozycja [73]).

[H6] Be'eri Greenfeld, André Leroy, Agata Smoktunowicz, Michał Ziembowski, Chains of prime ideals and primitivity of $\mathbb{Z}$-graded algebras, Algebras Repres. Theory 18 (2015), 777-800 (w spisie literatury pozycja [22]).

[H7] A. Smoktunowicz, M. Ziembowski, Differential polynomial rings over locally nilpotent rings need not be Jacobson radical, J. Algebra 412 (2014), 207 – 217 (w spisie literatury pozycja [62]).

c) omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Algebraiczne własności rozszerzeń nieprzemiennych pierścieni łącznych

Michał Ziembowski

Wprowadzenie

Na początku pragniemy zaznaczyć, że ilekroć będzie tu mowa o pierścieniach, zawsze na myśli mamy pierścienie łączne, które z założenia nie muszą być przemienne. Ponadto odwołując się do pojęcia pierścienia zakładamy, że posiada on jedynkę. Jeśli natomiast mowa będzie o pierścieniach bez jedynki, fakt ten będzie odpowiednio podkreślony.

Teoria pierścieni nieprzemiennych ma swoją wypracowaną i ugruntowaną pozycję we współczesnej matematyce. Wiedza na temat tych struktur algebraicznych jest obszerna, a co za tym idzie, zaobserwować można pewne schematy, według których prowadzone są nad nimi badania. Trzeba przy tym powiedzieć, że schematy, o których mowa powyżej, wiążą się z naturalnymi pytaniami, jakie pojawiają się podczas prowadzenia rozważań w interesującym nas obszarze. Omówimy tutaj następujący schemat: Niech α i β będą pewnymi interesującymi nas własnościami, jakie mogą posiadać pierścienie. Przypuśćmy, że dane są pierścień R i pierścień P powstały w wyniku pewnej konstrukcji algebraicznej (np. konstrukcja pierścienia wielomianów), w przeprowadzeniu której wykorzystywany jest R. W opisywanym schemacie pojawiają się następujące pytania:
- Czy jeśli R ma własność α, to P spełnia warunek definiujący własność β?
- Czy jeśli P ma własność β, to wówczas R ma własność α?
- Jakie warunki są konieczne, a jakie wystarczające na to, aby P miał własność β?

Inne ujęcie badań prowadzonych w teorii pierścieni związane jest z własnościami pierścieni, które z założenia mają dodatkową strukturę algebraiczną. Dokładniej, załóżmy, że interesuje nas pewna klasa pierścieni Δ i załóżmy, że pierścień R ma dodatkową strukturę algebraiczną (np. jest zdgradowany). Pytamy wówczas o warunki, które są konieczne lub wystarczające na to, aby R należał do klasy Δ. Takie podejście, czyli założenie o dodatkowej strukturze, wynika często z trudności, jakie napotykamy w przypadku, kiedy chcemy klasę Δ rozważać w ogólności.

Wszystkie prace wchodzące w skład cyklu zatytułowanego "Algebraiczne własności rozszerzeń nieprzemiennych pierścieni łącznych" związane są z pewnymi konstrukcjami algebraicznymi wykorzystującymi dany pierścień R, ale mogą być również rozpatrywane jako badania nad pierścieniami z dodatkową strukturą algebraiczną. Wpisują się one również w schematy, o których była mowa powyżej. Prezentowane wyniki związane są w większości z naturalnymi pytaniami o możliwość transferu pewnych własności pierścieni do niektórych typów rozszerzeń. Ten kierunek badań jest w swej istocie bardzo naturalny i w przypadku przedstawianych prac, będących głównym osiągnieciem habilitanta, jest ich wspólnym mianownikiem.

Praca [H1] jest wynikiem badań, których motywacje pochodzą z pracy [57] i z potrzeby przyjrzenia się błędom w niej się znajdującym. W omawianej pracy podano warunki konieczne i dostateczne na to, aby dla pierścienia R, pierścień szeregów Laurenta $R((x))$ był czysty (ang. clean ring). Przypomnijmy w tym miejscu, że pierścień jest *czysty* jeśli dowolny jego lement f może być zapisany jako suma elementu odwracalnego u i idempotenta e. W pracy [H2] pokazano, że jeżeli pierścień szeregów Laurent'a $R((x))$ jest półlokalny, to pierścień R jest półdoskonały oraz radykał Jacobsona pierścienia R jest nil ideałem. Fakt powyższy pokazuje, że [57, Theorem 3] jest nieprawdziwe. W pracy [H3] skonstruowany został pierścień R, którego wszystkie ideały jednostronne są ideałami dwustronnymi, a którego klasyczny pierścień prawostronnych ułamków nie ma wspomnianej własności. Konstrukcja ta daje negatywną odpowiedź na pytanie zadane w pracy [16] dotyczące tego, czy własność nieposiadania przez pierścień R ideałów jednostronnych, które nie są dwustronnymi, przenosi się na pierścień klasycznych prawostronnych ułamków pierścienia R. W pracy [H4] wykazano, że każdy pierścień, którego krata prawostronnych ideałów jest rozdzielna, spełnia tak zwany warunek Armendariza (definicja tej klasy pierścieni znajduje się w dalszej części autoreferatu). W tej samej pracy skonstruowano również przykład ukazujący różnice między klasami pierścieni spełniających warunek Armendariza w kontekście wielomianów i w kontekście pierścieni półgrupowych. W pracy [H5] zbadano warunek Armendariza dla modułów, przy tym ilustrując wyniki odpowiednimi przykładami. W pracy [H6] rozważane są pierścienie zgradowane przez liczby całkowite. Między innymi otrzymano wyniki dotyczące półprymitywności oraz prymitywności skończenie generowanych zgradowanych algebr pierwszych. Ponadto, wykorzystując opis struktury ideałów homogenicznych w skończenie generowanych, zgradowanych algebrach pierwszysch ze wzrostem kwadratowym, otrzymano nowy wynik dotyczący skończoności klasycznego wymiaru Krull'a tych algebr. Ostatecznie, w pracy znajdują się wyniki mówiące o radykale Browna-McCoy'a iloczynu tensorowego algebr. Praca [H7] zawiera konstrukcje pierścienia lokalnie nilpotentnego R i różniczkowania δ tego pierścienia, dla których pierścień wielomianów z różniczkowaniem $R[x;\delta]$ nie jest radykalny Jacobsona. Konstrukcja ta daje negatywną odpowiedź na pytanie postawione przez Shestakov'a.

Opis wyników rozprawy

Tak jak wspomnieliśmy we wstępie, wszystkie rozważane pierścienie są łączne, posiadają jedynkę (jeśli będzie mowa o pierścieniach bez jedynki, wówczas zostanie to wyraźnie zaznaczone) oraz nie zakładamy, że są przemienne. Dla pierścienia R przez $J(R)$ oznaczamy radykał Jacobsona (część wspólna wszystkich prawostronnych ideałów maksymalnych), przez $\beta(R)$ radykał pierwszy (część wspólna wszyskich ideałów pierwszych), a przez $N(R)$ oznaczamy nil radykał (suma algebraiczna wszystkich nil ideałów pierścienia R).

O pracy [H1].

Pierścień R nazywamy półpierwotnym (ang. semiprimary ring), jeśli radykał Jacobsona $J(R)$ jest nilpotenty oraz $R/J(R)$ jest półprosty. Jeden z bardzo interesujących i klasycznych wyników znany pod nazwą Twierdzenia Hopkins'a-Levitzki'ego brzmi następująco:

Twierdzenie 1. *Niech R będzie pierścieniem półpierwotnym. Wówczas dla dowolnego prawostronnego R-modułu M następujące warunki są równoważne:*
(1) M jest noetherowaski,
(2) M jest artinowski,
(3) M ma ciąg kompozycyjny.

W wyniku prób osłabienia, w powyższym twierdzeniu, założenia o nilpotentości radykału Jacobsona, wyodrębniona została, a następnie bardzo intensywnie badana, klasa pierścieni zwanych półdoskonałymi. To właśnie one z definicji są tymi pierścieniami, dla których $R/J(R)$ jest półprosty oraz idempotenty pierścienia $R/J(R)$ podnoszą się do idempotentów pierścienia R, tzn. jeśli $a^2 - a \in J(R)$ dla pewnego $a \in R$, to istnieje idempotent $e^2 = e \in R$ taki, że $a - e \in J(R)$. Znany jest fakt (np. [31, Theorem 21.28]), który mówi, że w przypadku, gdy ideał I pierścienia R jest nil, wówczas wszystkie idempotenty pierścienia R/I podnoszą się do R.

Przypomnijmy, że element a pierścienia R nazywamy czystym, jeśli jest on sumą elementów $u, e \in R$ takich, że u jest odwracalny w R, a e jest elementem idempotentym. Jeśli każdy element pierścienia R jest czysty, to mówimy, że R jest pierścieniem czystym. W pracy [10] udowodniono, że pierścień R jest półdoskonały wtedy i tylko wtedy, gdy R jest czysty i każdy podzbiór $P \subseteq R$ składający się ze wzajemnie ortogonalnych idempotentów jest skończony.

Historycznie klasa pierścieni czystych została zdefiniowana w pracy [50] w związku z badaniami nad pierścieniami wymiennymi (ang. exchange rings). Z pracy [21] wiadomo, że pierścień R jest pierścieniem wymiennym, jeśli dla każdego $a \in R$ istnieje idempotent $e \in R$ taki, że $e \in aR$ i $1 - e \in (1 - a)R$. Okazuje się [10], że R jest półdoskonały wtedy i tylko wtedy, gdy R jest wymienny i każdy podzbiór $P \subseteq R$ składający się z wzajemnie ortogonalnych idempotentów jest skończony. W [50] pokazano, że każdy pierścień czysty jest wymienny. Jednocześnie znany jest przykład Bergmana pierścienia wymiennego, który nie jest czysty.

Kolejną klasą, w kontekście której pojawiają się pierścienie czyste, są pierścienie regularne (w sensie von Neumanna). Mówimy, że pierścień R jest regularny, jeśli dla dowolnego $a \in R$ istnieje $x \in R$ taki, że $a = axa$. Jeśli zawsze x może być tak dobrany, aby był elementem odwracalnym w R, to R nazywany jest pierścieniem unit-regularnym (ang. unit-regular ring) (*używamy tu pierwszego członu angielskiego z powodu braku dobrego polskiego tłumaczenia nazwy klasy rozważanych pierścieni*). Pierścienie regularne pierwszy raz były rozważane w okolicach 1935 roku przez Johna von Neumanna, a jeden z faktów ich dotyczących mówi, że jeśli prawostronny moduł M nad pierścieniem R jest półprosty, to pierścień endomorfizmów $End(M_R)$ jest regularny. Fakt, który jest dla nas ważny i należy go wspomnieć, pochodzi z pracy [11] i mówi, że pierścień R jest unit-regularny wtedy i tylko wtedy, gdy R jest czysty i jeśli $a = u + e$, gdzie $u, e \in R$ są odpowiednio elementem odwracalnym i idempotentem, to $aR \cap eR = 0$.

Do przedstawionych powyżej informacji i jednocześnie motywacji chcemy dopowiedzieć, że klasa pierścieni czystych jest obecnie bardzo intensywnie badana w wielu ośrodkach matematycznych. Istnieje bardzo wiele prac na temat klas, które są uogólnieniem omawianej, jak również wiele prac na temat jej podklas.

Przechodząc do omówienia wyników wchodzących w skład rozprawy, a dotyczących pierścieni czystych, rozważmy pierścień R. Pierścień szregów Laurent'a $R((x))$ definiuje się jako pierścień składający się z formalnych szeregów

$$\sum_{i=l}^{\infty} a_i x^i, \;\; l \in \mathbb{Z}, a_i \in R,$$

gdzie x jest zmienną, dodawanie jest po współrzędnych, a mnożenie definiujemy w następujący sposób:

$$(\sum_{i=p}^{\infty} a_i x^i)(\sum_{j=q}^{\infty} b_j x^j) = \sum_{k=p+q}^{\infty} (\sum_{i+j=k} a_i b_j) x^k.$$

Bezpośrednia motywacja do badań przedstawionych w omawianej pracy [H1] jest związana z [57], gdzie znaleźć można nieścisłości w dowodzie twierdzenia, które mówi, że pierścień szeregów Laurent'a jest czysty w przypadku, gdy wyjściowy pierścień R jest czysty. Powstaje zatem potrzeba przyjrzenia się pierścieniom szeregów Laurent'a w kontekście pierścieni czystych. Aby przedstawić główny wynik, jaki udało się w pracy uzyskać, musimy przypomnieć jeszcze kilka definicji.

Pieścień R nazywamy 2-*pierwotnym* (ang. 2-primal), jeśli radykał pierwszy $\beta(R)$ tego pierścienia jest równy zbiorowi wszystkich jego elementów nilpotentnych. Klasa tych pierścieni rozważana była między innymi w [36] i [37]. Mówimy, że pierścień R jest *silnie regularny*, jeśli jest regularny i nie posiada niezerowych elementów nilpotentnych. Ostatecznie, jeśli $R/J(R)$ jest regularny i idempotenty pierścienia $R/J(R)$ podnoszą się do idempotentów pierścienia R, to R nazywamy półregularnym. Poniżej znajdują się główne wyniki udowodnione w pracy [H1].

Twierdzenie 2. *Niech R będzie 2-pierwotnym pierścieniem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
(1) $R((x))$ jest czysty,
(2) $R((x))/J(R((x)))$ jest czysty,
(3) $R((x))$ jest wymienny,
(4) $R((x))/J(R((x)))$ jest wymienny,
(5) R jest półregularny oraz $J(R)$ jest nil,
(6) $R/J(R)$ jest silnie regularny oraz $J(R)$ jest nil.

Jeśli rozważymy dowolne ciało K, to oczywistym jest, że pierścień szeregów potęgowych $R = K[[x]]$ jest czysty, $x \in J(R)$ i x nie jest elementem nilpotentym. Zatem $R((x))$ nie jest czysty na podstawie powyższego rezultatu. Ten prosty przykład pokazuje nieprawdziwość wyniku Sonin'a.

Wykorzystując powyższy wynik, w omawianej pracy wykazano również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. *Niech R będzie 2-pierwotnym pierścieniem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
(1) $R((x))$ jest półdoskonały,
(2) $R((x))$ jest półregularny,
(3) $R((x))/J(R((x)))$ jest regularny,

(4) R jest półdoskonały i $J(R)$ jest nil,

(6) $R/J(R)$ jest skończonym iloczynem prostym pierścieni z dzieleniem i $J(R)$ jest nil.

O pracy [H2].

Przypomnijmy, że jeśli dla pierścienia R pierścień ilorazowy $R/J(R)$ jest półprosty (lub równoważnie lewostronnie artinowski), to R nazywamy pierścieniem półlokalnym. Jeśli dodatkowo idempotenty pierścienia $R/J(R)$ podnoszą się do idemoptentów pierścienia R, to tak, jak to było wcześniej powiedziane, R nazywamy półdoskonałym. W pracy [57] znajdujemy (nieprawdziwe) twierdzenie, z którego wynika, że jeśli R jest półdoskonały, to pierścień szeregów Laurent'a $R((x))$ jest półdoskonały. W obecnie omawianej, krótkiej pracy udowodniono następujące.

Twierdzenie 4. *Jeśli dla pierścienia R, pierścień szeregów Laurent'a $R((x))$ jest półlokalny, to R jest półdoskonały i radykał Jacobsona $J(R)$ pierścienia R jest nil.*

Wykorzystując powyższy fakt, bardzo łatwo można uzasadnić nieprawdziwość twierdzenia Sonin'a. Mianowicie, podobnie jak to było powyżej rozważmy dowolne ciało K i pierścień $R = K[[x]]$ szeregów potęgowych o współczynnikach z K. Dla R, $J(R) = xK[[x]]$ i w oczywisty sposób $R/J(R)$ jest izomorficzny z K. Zatem R jest półdoskonały i $J(R)$ nie jest nil. Dlatego też $R((x))$ nie jest półlokalny, a zatem także nie jest półdoskonały.

Ponadto w pracy postawiono następujące pytanie:

Pytanie 5. *Jakie warunki są koniecznymi a jakie wystarczającymi na to, aby pierścień skośnych szeregów potęgowych Laurent'a $R((x, \varphi))$ był półdoskonały?*

O pracy [H3].

Przypomnijmy, że pierścień R jest *prawostronnie duo* (ang. right duo), jeśli każdy prawostronny ideał tego pierścienia jest także ideałem lewostronnym. Odpowiednio definiuje się pierścienie lewostronnie duo. Jeśli R jest lewostronnie i prawostronnie duo, to mówimy, że R jest duo. Historia pierścieni duo sięga roku 1958. Klasa ta została zdefiniowana i po raz pierwszy rozważana w pracy [18], w której pewne klasyczne wyniki z teorii pierścieni przemiennych próbowano uogólnić na przypadek nieprzemienny. Zwykle przeniesienie wyników z teorii pierścieni przemiennych na grunt nieprzemienny jest bardzo trudne lub wręcz niewykonalne. Dlatego też próbuje się pracować z klasami pierścieni nieprzemiennych, które posiadają pewne własności posiadane przez wszystkie pierścienie przemienne. Oczywistym jest, że pod taki schemat podpadają rozważania na temat pierścieni posiadających własność duo.

Niech R będzie pierścieniem oraz niech S będzie multiplikatywnie zamkniętym podzbiorem R (tzn. $S^2 \subseteq S, 1 \in S$ i $0 \notin S$). Wówczas pierścień RS^{-1} nazywany jest prawostronnym pierścieniem ułamków pierścienia R względem S, jeśli istnieje homomorfizm $\phi : R \to RS^{-1}$ taki, że:
(a) Dla dowolnego $s \in S$, $\phi(s)$ jest odwracalny w RS^{-1}.
(b) Dowolny element $q \in RS^{-1}$ ma postać $\phi(a)\phi(s)^{-1}$ dla pewnych $a \in R, s \in S$.
(c) $Ker(\phi) = \{a \in R : as = 0$ dla pewnego $s \in S\}$.

Znany jest fakt ([32, Theorem 10.6]) mówiący o tym, że pierścień R ma prawostronny pierścień ułamków względem S wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące:
(1) Dla dowolnych $a \in R$ i $s \in S$, $aS \cap sR \neq \emptyset$.
(2) Dla dowolnego $a \in R$, jeśli $ta = 0$ dla pewnego $t \in S$ wtedy $as = 0$ dla pewnego $s \in S$.
Jeśli S jest zbiorem wszystkich elementów pierścienia R, które nie są ani prawostronnymi, ani lewostronnymi dzielnikami zera, oraz S spełnia powyższy warunek (1) (tzw. warunek Ore'go), to RS^{-1} nazywany jest klasycznym prawostronnym pierścieniem ułamków i zwykle oznaczany przez $Q_r(R)$. Klasyczny lewostronny pierścień ułamków $Q_l(R)$ definiuje się analogicznie.

W pracy [16] Diesl i inni rozważają kilka własności pierścieni nieprzemiennych, które w naturalny sposób posiadają pierścienie przemienne, i badają jak te własności zachowują się przy przejściu od pierścienia R do pierścienia $Q_r(R)$, jeśli oczywiście ten ostatni istnieje. Jedną z badanych jest własność duo i w związku z nią w artykule [16] postawione jest następujące pytanie:

Pytanie 6. *Niech R będzie duo pierścieniem (łatwo można zauważyć, że $Q_r(R)$ i $Q_l(R)$ wówczas istnieją i są izomorficzne). Czy wtedy pierścień $Q_r(R)$ również jest duo?*

Wykorzystując konstrukcję pierścienia uogólnionych szeregów potęgowych, w pracy [H3] skonstruowano pierścień duo, dla którego pierścień $Q_r(R)$ nie jest ani prawostronnie duo, ani lewostronnie duo, co daje negatywną odpowiedź na Pytanie 6. Poniżej, najpierw przedstawimy konstrukcję pierścienia uogólnionych szeregów potęgowych (w literaturze konstrukcję tę można znaleźć w [59]), a następnie zbudujemy przykład wspomnianego pierścienia duo.

Niech R będzie pierścieniem, a $(S, \leq)$ ściśle uporządkowanym monoidem (tzn. S jest częściowo uporządkowany przez relację $\leq$ oraz dla dowolnych $s, t \in S$, $s < t$ implikuje $su < tu, us < ut$ dla dowolnego $u \in S$). Rozważmy zbiór A wszystkich funkcji $f : S \to R$, takich, że każdy ściśle malejący ciąg elementów ze zbiory $supp(f) = \{s \in S : f(s) \neq 0\}$ stabilizuje się oraz każdy podzbiór zbioru $supp(f)$, składający się ze wzajemnie nieporównywalnych elementów ze względu na $\leq$, jest skończony. Okazuje się, że dla dowolnych $f, g \in A$ oraz $s \in S$ zbiór $X_s(f, g) = \{(x, y) \in supp(f) \times supp(g) : s = xy\}$ jest skończony. Dlatego też możemy zdefiniować iloczyn $fg : S \to R$

elementów $f, g \in A$ w następujący sposób: dla dowolnego $s \in S$

$$(fg)(s) = \sum_{(x,y)\in X_s(f,g)} f(x)g(y).$$

Ze zdefiniowanym w naturalny sposób dodawaniem i mnożeniem jak powyżej, A ma strukturę pierścienia i nazywany jest pierścieniem uogólnionych szeregów potęgowych.

Przechodzimy teraz do zapowiedzianej konstrukcji pierścienia duo. Niech G będzie wolną grupą abelową generowana przez zbiór $\{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ i niech ψ będzie endomorfizmem G takim, że $\psi(x_i) = x_{i+1}$ dla dowolnego $i \in \mathbb{Z}$. Oczywistym jest, że dowolny element $g \in G$ możemy zapisać jako $g = x_{l_1}^{k_1} x_{l_2}^{k_2} \cdots x_{l_n}^{k_n}$, gdzie $l_1 < l_2 \cdots < l_n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Powiemy, że dla elementu g powyższa postać jest kanoniczną a liczbę k_n nazwiemy wykładnikiem głównym. Dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ przyjmujemy $g_1 \prec g_2$, jeśli $g_1 \neq g_2$ i $g_1^{-1}g_2$ ma dodatni wykładnik główny. Łatwo można sprawdzić, że $(G, \preceq)$ jest grupą liniowo uporządkowaną.

Następnie rozważamy zbiór T wszystkich par $(m, g) \in \mathbb{Z} \times G$ takich, że albo $m > 0$ i g jest dowolne, albo $m = 0$ i $1 \preceq g$.
Definiujemy w T mnożenie i porządek: dla dowolnych $(m_1, g_1), (m_2, g_2) \in T$

$$(m_1, g_1)(m_2, g_2) = (m_1 + m_2, \psi^{m_2}(g_1)g_2)$$

oraz

$$(m_1, g_1) \leq (m_2, g_2) \Leftrightarrow m_1 < m_2 \text{ lub } m_1 = m_2 \text{ i } g_1 \preceq g_2.$$

W pracy wykazano, że $(T, \leq)$ jest liniowo uporządkowanym monoidem ze wszystkimi elementami większymi lub równymi elementowi neutralnemu $(0, 1)$. Ponadto krata wszystkich prawostronnych ideałów monoidu T jest uporządkowana liniowo ze względu na inkluzję. Analogiczną własność posiada krata lewostronnych ideałów monoidu T.

Niech D będzie pierścieniem z dzieleniem. Wykorzystując [40] widzimy, że pierścień uogólnionych szeregów potęgowych $D[[T]]$ jest duo oraz ideały tego pierścienia są liniowo uporządkowane ze względu na inkluzję. Dla elementu f pierścienia $R = D[[T]]$ przez $\pi(f)$ oznaczamy minimalny element zbioru *supp*(f) (zawsze taki element istnieje, ponieważ T jest liniowo uporządkowany) i rozważamy ideał

$$I = 0 \cup \{f \in R \setminus \{0\} : \pi(f) > (1, x_1^i x_2^j x_3) \text{ dla pewnych } i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Następny krok to konstrukcja pierścienia ilorazowego R/I, który w oczywisty sposób jest duo. Dla pierścienia R/I mamy następujący kluczowy fakt.

Lemat 7. *Klasyczny prawostronny pierścień ułamków $Q_r(R/I)$ pierścienia R/I nie jest prawostronnie duo i jest lewostronnie duo.*

Wydaje się, że powyższy lemat sam w sobie zasługuje na uwagę. Istnienie pierścienia o własnościach, które on posiada jest zaskakujące.

Następnie rozważamy pierścień $(R/I)^{op}$, który jako zbiór jest równy R/I, a jako struktura algebraiczne różni się od R/I tym, że dla $a, b \in (R/I)^{op}$ mnożenie $*$ w $(R/I)^{op}$ jest dane wzorem $a*b = b\cdot a$ (gdzie $\cdot$ jest mnożeniem w R/I). Ostatecznie, przy oznaczeniach jak powyżej, dowodzimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8. *Pierścień $B = R/I \times (R/I)^{op}$ jest pierścieniem duo, natomiast jego klasyczny prawostronny pierścień ułamków $Q_r(B)$ nie jest ani prawostronnie, ani lewostronnie duo.*

O pracy [H4].

Przypomnijmy, że pierścień R jest *prawostronnie rozdzielny* [64], jeśli krata prawostronnych ideałów tego pierścienia jest rozdzielna, tzn. $(A + B) \cap C = A \cap C + B \cap C$ dla dowolnych prawostronnych ideałów A, B, C pierścienia R. Analogicznie definiuje się pierścienie lewostronnie rozdzielne. Pierścieniom z opisaną własnością poświęcone są, oprócz wielu innych prac, pozycje [67] i [68]. R jest nazywany *pierścieniem Armendariza*, jeśli dla dowolnych $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ z faktu $f(x)g(x) = 0$ wynika, że $a_i b_j = 0$ dla dowolnych i, j. Omawiana klasa została zdefiniowana przez Rege and Chhawchharia w [58], która to praca motywowana była wynikiem Armendariza. Ten ostatni w swoich badaniach [4] pokazał, że jeśli pierścień R jest zredukowany (nie posiada niezerowych elementów nilpotentnych), to $f(x)g(x) = 0$, implikuje $a_i b_j = 0$ dla dowolnych i, j. W oczywisty sposób, rozważane między innymi w pracach [2], [3], [26] i [29], pierścienie Armendariza wpisują się w tematykę badań nad dzielnikami zera pierścieni wielomianów.

W pracy [39] wykazano, że jeśli w pierścieniu R wszystkie prawostronne ideały są porównywalne ze względu na inkluzję (takie pierścienie w literaturze nazywane są *prawostronnie łańcuchowymi*), to R jest pierścieniem Armendariza. Nie jest trudno zobaczyć, że każdy pierścień prawostronnie łańcuchowy jest prawostronnie rozdzielny. Dlatego też powstało pytanie, czy zachodzi jakiś związek miedzy pierścieniami Armendariza i prawostronnie rozdzielnymi. Artykuł [H4] daje wyczerpującą odpowiedź w tej kwestii. Badając tak zwane saturacje, które w kontekście pierścieni rozdzielnych badane były w pracy [20], w pracy [H4] został udowodniony następujący wynik.

Twierdzenie 9. *Jeśli R jest prawostronnym lub lewostronnym pierścieniem rozdzielnym, to R jest pierścieniem Armendariza.*

Dotychczas bardzo dużo było wiadomo o własnościach pierścieni Armendariza, natomiast z pewną przesadą, ale jednak można powiedzieć, że jedynym punktem wyjścia do budowania przykładów tych pierścieni, były pierścienie zredukowane. W tym kontekście powyżej przedstawione twierdzenie jawi się jako nowe źródło dostarczające przykładów, co przyczyni się z pewnością do jeszcze lepszego zrozumienia struktury omawianych pierścieni.

W rzeczywistości w omawianej pracy udowodniono silniejsze twierdzenie od tego przedstawionego powyżej. Do zaprezentowania tego wyniku potrzebujemy kilku definicji.

Niech S będzie monoidem. Zgodnie z [33] pierścień R nazywa się S-Armendariza, jeśli dla dowolnych $\alpha = \sum_{s\in S} a_s s$ i $\beta = \sum_{t\in S} b_t t$ elementów pierścienia monoidowego $R[S]$ (gdzie $s, t \in S$ a $a_s, b_t \in R$), $\alpha\beta = 0$ implikuje $a_s b_t = 0$ dla wszystkich $s, t \in S$. Dalej, monoid S jest nazywany u.p. monoidem (ang. unique product), jeśli dla dowolnych niepustych podzbiorów $X, Y \subseteq S$ istnieje $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$ takie, że $x_0 y_0 \neq xy$ dla dowolnych $(x, y) \in X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$. Klasa u.p. monoidów zawiera liniowo uporządkowane monoidy, podmonoidy grup wolnych oraz beztorsyjne nilpotentne grupy, i rozważana była między innymi w [8], [38], [39] i [55]. W [H4] udowodniono następujące.

Twierdzenie 10. *Jeśli R jest prawostronnie lub lewostronnie rozdzielnym pierścieniem, a S jest u.p. monoidem, to R jest pierścieniem S-Armendariza.*

Łatwo można uzasadnić, że jeśli R jest pierścieniem S-Armendariza dla pewnego u.p. monoidu S, to jest on pierścieniem Armendariza. Stąd też powstało pytanie o to, czy istnieje pierścień Armendariza i u.p. monoid S takie, że R nie jest S-Armendariza. Jako drugi wynik praca [H4] zawiera konstrukcję takiego właśnie przykładu. Dokładniej, skonstruowano pierścień Armendariza R taki, że R nie jest S-Armendariza dla pewnego u.p. monoidu S. Poniżej przedstawiamy wspomnianą konstrukcję.

Niech S będzie monoidem generowanym przez $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$ z definiującymi relacjami:

$$s_1t_1 = s_2t_3,\ s_1t_2 = s_3t_1,\ s_1t_3 = s_2t_2,\ s_3t_2 = s_2t_1.$$

Jak zostało pokazane przez Krempę, S jest u.p. monoidem ([55, Przykład 13, Rozdział 10]).

Niech $K = \mathbb{Z}_2$ będzie ciałem dwuelementowym i niech R będzie K algebrą generowaną przez y_1, y_2, y_3 z relacjami

$$y_1^2 = y_2y_3,\ y_1y_2 = y_3y_1,\ y_1y_3 = y_2^2,\ y_3y_2 = y_2y_1,$$
$$y_3^2 = 0, \quad y_iy_jy_k = 0 \text{ for all } i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Zauważmy, że dla $f = y_1s_1 + y_2s_2 + y_3s_3$, $g = y_1t_1 + y_2t_2 + y_3t_3 \in R[S]$ mamy $fg = 0$ i $y_1y_1 \neq 0$, co pokazuje, że R nie jest S-Armendariza. Dalej, analizując różne możliwe przypadki (ta część jest dalece nietrywialna) dla skonstrułowanego pierścienia R, w pracy udowodniono, że jest on pierścieniem Armendariza.

O pracy [H5].

Praca [H5] jest próbą (okazało się, że udaną) przeniesienia wyników z pracy [H4] na grunt modułów i spojrzenia na warunek Armendariza właśnie z takiej perspektywy. W literaturze dotyczącej rozdzielności kraty ideałów jednostronnych pierścieni, bardzo często pojawia się podejście z natury ogólniejsze, a mianowicie - rozważa się rozdzielne moduły. Niech R będzie pierścieniem i niech M będzie prawostronnym modułem nad R. Mówimy, że M jest *modułem rozdzielnym*, jeśli krata podmodułów tego modułu jest rozdzielna. Analogicznie, jak to było w przypadku pierścieni Armendariza, powiemy, że prawostronny moduł M nad pierścieniem R jest modułem Armendariza [71], jeśli dla dowolnych $m(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i x^i \in M[x]$ i $f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j x^j \in R[x]$, $m(x)f(x) = 0$ implikuje $m_i f_j = 0$ dla dowolnych i, j (w naturalny sposób $M[x]$ jest tutaj prawostronnym $R[x]$ modułem). Analogicznie wprowadzamy odpowiednie terminy w przypadku, gdy M jest lewostronnym R modułem. Chociaż główny wynik pracy [H5] jest ogólniejszy, my chcemy ograniczyć się tu do pierścieni i modułów, dlatego przyjmuje on następującą postać.

Twierdzenie 11. *Niech R i A będą pierścieniami i niech ${}_RV_A$ będzie bimodułem. Jeśli ${}_RV$ jest rozdzielnym lewostronnym R-modułem, to prawostronny A-moduł V_A jest modułem Armendariza.*

Korzystając z powyższego twierdzenia możemy udowodnić następujący wniosek.

Wniosek 12. *Jeśli R jest prawostronnie rozdzielnym pierścieniem, to każdy prawostronny R-moduł jest modułem Armendariza.*

Zatem w oczywisty sposób Wniosek 12 implikuje Twierdzenie 9. W tym miejscu chcemy jednak zaznaczyś, że dowód Twierdzenia 9, jaki znajduje się w pracy [H4], jest całkowicie inny niż rozważania, które doprowadziły do sformułowania Wniosku 12.

W pracy [H5], oprócz materiału już zaprezentowanego, skonstruowano również przykłady ukazujące ograniczenia uzyskanych wyników.

Przykłady 13. *(1) Istnieje pierścień R i rozdzielny prawostronny R-moduł V, który nie jest modułem Armendariza.*
(2) Istnieje pierścień R, który nie jest prawostronnie rozdzielny i dla którego każdy prawostronny oraz każdy lewostronny R-moduł jest Armendariza.
(3) Istnieje prawostronnie rozdzielny pierścień R (zatem każdy prawostronny R-moduł jest Armendariza) taki, że pewien lewostronny R-moduł M nie jest Armendariza.

O pracy [H6].

Materiał, który składa się na obecnie omawianą pracę, jest wynikiem rozważań inspirowanych przez kilka prac, o których będzie mowa podczas prezentowania kolejnych rezultatów.

Chcielibyśmy w tym miejscu zaznaczyć, że obecnie nie zakładamy, że rozważane pierścienie posiadają jedynkę.

Przypomnijmy, że pierścień R jest *półprymitywny*, jeśli radykał Jacobsona tego pierścienia równy jest zero. Prawostronny ideał Q pierścienia R jest modularny, jeśli istnieje $a \in R$ takie, że $r - ar \in Q$ dla dowolnego $r \in R$. Jeśli ideał P pierścienia R jest maksymalnym dwustronnym ideałem zawartym w pewnym modularnym maksymalnym prawostronnym ideale Q pierścienia R, to powiemy, że P jest *(prawostronnie) ideałem prymitywnym.* Jeśli 0 jest prawostronnie prymitywnym ideałem, to mówimy, że R jest pierścieniem *(prawostronnie) prymitywnym.* Przecięcie wszystkich (prawostronnych) ideałów prymitywnych pierścienia R jest równe radykałowi Jacobsona $J(R)$.

W omawianej pracy rozważane są między innymi zagadnienia dotyczące półprymitywności i prymitywności skończenie generowanych zgradowanych algebr pierwszych. Motywacje w tym przypadku związane są z pracą [5], gdzie rozważane są algebry zgradowane przez liczby całkowite dodatnie. Przyjrzenia się tym wynikom pod kątem możliwości uogólnienia ich na przypadek algebr zgradowanych przez liczby całkowite, doprowadziło do możliwości sformułowania i udowodnienia następujących twierdzeń.

Twierdzenie 14. *Niech $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ będzie skończenie generowaną $\mathbb{Z}$-zgradowaną algebrą pierwszą nad ciałem K. Przypuśćmy, że komponent R_0 jest skończenie wymiarową algebrą i załóżmy, że algebra R jest generowana przez elementy stopni $-1, 1$ i 0. Ponadto przypuśćmy, że $R_k \neq 0$ dla prawie wszystkich k. Wówczas R nie ma niezerowych homogenicznych nil ideałów. W szczególności algebry R_0 i R są półprymitywne.*

Twierdzenie 15. *Niech $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ będzie skończenie generowaną $\mathbb{Z}$-zgradowaną algebrą pierwszą nad ciałem K. Przypuśćmy, że komponent R_0 jest skończenie wymiarową algebrą i załóżmy, że algebra R jest generowana przez elementy stopni $-1, 1$ i 0. Jeśli R ma wymiar Gelfanda-Kirillova mniejszy niż 3, to albo R jest algebrą prymitywną, albo R spełnia tożsamość wielomianową.*

Kolejny wynik, jaki pojawia się w omawianej pracy, można widzieć jako odpowiednik dla ideałów, dobrze znanego twierdzenie udowodnionego przez Bergmana, które mówi, że nie istnieją skończenie generowane algebry mające wymiar Gelfanda-Kirillova mniejszy od 2 i większy od 1. Jednocześnie należy wpomnieć, że był on motywowany przez [5, Theorem 1.3].

Twierdzenie 16. *Niech $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ będzie skończenie generowaną $\mathbb{Z}$-zgradowaną algebrą pierwszą nad ciałem K. Przypuśćmy, że R jest generowana przez elementy stopni -1, 1 i 0, oraz R_0 jest skończenie wymiarową algebrą. Wówczas dla dowolnego elementu homogenicznego $u \in R$ oraz ideału (u) generowanego przez u istnieje liczba naturalna m taka, że*

$$dim_K\big((u) \cap \big(\bigoplus_{i=-n}^{n} R_i\big)\big) \geq \frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$$

dla wszystkich dostatecznie dużych n.

W kolejnej części pracy rozważamy łańcuchy ideałów pierwszych w zgradowanych dziedzinach i algebrach pierwszych z małym wymiarem Gelfanda-Kirillova. W tym kontekście, wykorzystując Twierdzenie 16 udowodnione zostały następujące rezultaty.

Twierdzenie 17. *Niech R będzie skończenie generowaną $\mathbb{Z}$-zgradowaną algebrą pierwszą nad ciałem K. Załóżmy ponadto, że R ma wzrost kwadratowy i jest generowana przez elementy stopni $-1, 1$ i 0 oraz że R_0 jest algebrą skończenie wymiarową. Wówczas R ma skończony klasyczny wymiar Krulla.*

Twierdzenie 18. *Niech R będzie skończenie generowaną dziedziną zgradowaną przez nieujemne liczby całkowite. Załóżmy ponadto, że R jest generowana przez elementy stopni 0 i 1, R_0 jest algebrą skończenie wymiarową oraz R ma sześcienny wzrost. Wówczas R ma skończony klasyczny wymiar Krulla.*

Przypomnijmy, że pierścień R (bez jedynki) jest *radykalny Browna–McCoya*, jeśli nie może on być odwzorowany homomorficznie na prosty pierścień z jedynką. Pierścień R jest *radykalny Jacobsona*, jeśli dla dowolnego $a \in R$ istnieje $a' \in R$ taki, że $a + a' + aa' = a + a' + a'a = 0$. Wiadomo jest, że każdy pierścień radykalny Jacobsona jest radykalny Browna-McCoya. W pracy [56] wykazano, że jeśli R jest nil pierścieniem, to $R[x]$ jest radykalny Browna-McCoya oraz postawiono pytanie: czy jeśli R jest nil pierścieniem, to dla dowolnego n pierścień wielomianów $R[x_1, \ldots, x_n]$ o n przemiennych zmiennych jest radykalny Browna-McCoya? Problem ten pozostaje ciągle otwarty. Ważność powyższych zagadnień wynika z ich związku z Problemem Köthe, o którym więcej powiemy przy okazji omawiania następnej pracy. W tym kontekście w omawianym artykule udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 19. *Niech K będzie ciałem i niech R będzie skończenie generowaną algebrą nad K z wymiarem Gelfanda-Kirillova mniejszym od 3. Wówczas, jeśli R jest pierścieniem radykalnym Browna-McCoya, to również $R \otimes A$ jest radykalny Browna-McCoya dla dowolnej algebry A nad K.*

O pracy [H7].

Pragniemy na wstępie zaznaczyć, że podobnie jak to było przy omawianiu pracy [H6], rozważane pierścienie nie muszą posiadać jedynki. Wychodząc od pierścienia R, bardzo intensywnie badaną jest konstrukcja pierścienia wielomianów z różniczkowaniem.

Definicja 20. Niech R będzie pierścieniem. Dowolny homomorfizm addytywnej grupy R, $\delta : R \to R$, który spełnia dodatkowo

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b),$$

dla dowolnych $a, b \in R$, nazywamy różniczkowaniem na R.

Niech R będzie pierścieniem i niech δ będzie różniczkowaniem na R. Rozważmy zbiór $R[x; \delta]$ składający się z wielomianów postaci $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, gdzie $a_i \in R$, x jest zmienną, a n dowolną nieujemną liczbą całkowitą. Z dodawaniem zdefiniowanym w naturalny sposób oraz mnożeniem zdefiniowanym zgodnie z regułą

$$xa = ax + \delta(a),$$

gdzie $a \in R$, zbiór $R[x; \delta]$ ma strukturę pierścienia i nazywany jest w literaturze pierścieniem wielomianów z różniczkowaniem lub rozszerzeniem Orego.

Powiemy, że pierścień R jest lokalnie nilpotentny, jeśli dla dowolnego podzbioru $P = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, jego elementów, istnieje n takie, że $P^n = 0$ (zob. [31]). W pracy [1] Amitsur wykazał, że jeśli $R[x]$ jest radykalny Jacobsona, to R jest nil pierścieniem (czyli wszystkie elementy w R są nilpotentne) oraz $J(R[x]) = (J(R[x]) \cap R)[x]$. Krempa w pracy [30] pokazał, że pytanie o to, czy jeśli R jest nil pierścieniem, to wówczas $R[x]$ jest radykalny Jacobsona, jest równoważne Problemowi Köthe. Problem ten formułuje się jako pytanie o to, czy jeśli pierścień R nie posiada dwustronnych nil ideałów, to wówczas R nie posiada jednostronnych nil ideałów. Łatwo można wykazać, że jeśli R jest lokalnie nilpotentny, to wtedy $R[x]$ jest radykalny Jacobsona. Podczas konferencji zatytułowanej “Non-Associative Algebras and Related Topics”, która odbyła się w Coimbrze w 2011 roku Shestakov zadał następujące pytanie.

Pytanie 21. *Niech R będzie lokalnie nilpotentnym pierścieniem i niech δ będzie różniczkowaniem na R. Czy wówczas pierścień $R[x; \delta]$ jest radykalny Jacobsona?*

Poniżej przedstawiamy konstrukcję (bez dowodów), która pokazuje, że odpowiedź na pytanie Shestakova jest negatywna.

Niech K będzie ciałem, a A niech będzie wolną algebrą nad K generowaną przez przeliczalny zbiór wolnych generatorów $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Dla dowolnego $n > 0$, przez $A(n)$ oznaczamy podprzestrzeń liniową przestrzeni A generowaną przez wszystkie jednomiany długości n. Jeśli rozważamy jednomian $s = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$, gdzie $i_1,\dots,i_n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, to przez $l(s)$ oznaczamy jego długość, natomiast dla $q = 1,\dots,n$, pisząc $s[q]$ mamy na myśli element x_{i_q}. Ostatecznie, przez $\mathcal{M}$ oznaczamy zbiór jednomianów należących do A.

Rozważmy K-liniowe przekształcenie $\delta : A \to A$ takie, że dla dowolnego $i \geq 0$, $\delta(x_i) = x_{i+1}$ oraz dla $a, b \in A$,

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b),\ \delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b).$$

Oczywistym jest, że δ jest różniczkowaniem na A.

Dla $k > 0$ niech $\mathcal{X}_k = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ oraz niech

$$W(k,n) := \{\delta^l(x_{i_1}x_{i_2}\cdot\ \dots\ \cdot x_{i_n}) : x_{i_j} \in \mathcal{X}_k \text{ dla dowolnego } j, l \geq 0\}.$$

Dla dowolnego $k > 0$ rozważmy ideał I_k algebry A generowany przez $W(k, 2\cdot 100^{k^2})$, a następnie ideał $I = \sum_{k>0} I_k$. Kolejny krok to zdefiniowanie dla dowolnego $k > 0$ przestrzeni liniowej (tutaj, jak i wszędzie poniżej, przez A^1 oznaczamy pierścień A z dołączoną jedynką)

$$W_k = \sum_{m=0}^{\infty} A(m\cdot 100^{k^2})W(k, 100^{k^2})A^1.$$

Zachodzi następujący fakt.

Lemat 22. *Dla dowolnego $k > 0$ mamy $I_k \subseteq W_k$.*

Kluczowym w całej konstrukcji jest następujący fragment. Dla dowolnego $k > 0$ ustalmy liczby naturalne

$$c_1 = 100^{(k-1)^2},\ c_2 = 3\cdot 100^{(k-1)^2},\ \dots,\ c_{k+1} = 3^k\cdot 100^{(k-1)^2}$$

i przez Z_k oznaczmy zbiór tych elementów algebry A, które spełniają jeden z poniższych warunków:

(1) $a = \kappa s$, gdzie $\kappa \in K$, a $s \in \mathcal{M}$ jest taki, że $l(s) = 100^{k^2} - 1$, i istnieją liczby naturalne $p < q \leq k$ takie, że
$$s[3^p\cdot 100^{(k-1)^2}] = s[3^q\cdot 100^{(k-1)^2}].$$

(2) $a = \kappa(s_1 + s_2)$, gdzie $\kappa \in K$, $s_1, s_2 \in \mathcal{M}(100^{k^2} - 1)$, i istnieją liczby naturalne $p < q \leq n$ i $l_1 > l_2 > 0$ takie, że
$$s_1[3^p\cdot 100^{(k-1)^2}] = x_{l_1},\ s_1[3^q\cdot 100^{(k-1)^2}] = x_{l_2},$$
$$s_2[3^p\cdot 100^{(k-1)^2}] = x_{l_2},\ s_2[3^q\cdot 100^{(k-1)^2}] = x_{l_1}$$
oraz $s_1[j] = s_2[j]$ dla dowolnych $j \neq 3^p\cdot 100^{(k-1)^2},\ 3^q\cdot 100^{(k-1)^2}$.

Lemat 23. *Dla dowolnego $k > 0$ i $a \in Z_k$, $\delta(a)$ jest sumą elementów z Z_k.*

Następnie dla dowolnego $k > 0$ definiujemy przestrzeń liniową

$$B_k = \sum_{m=0}^{\infty} A(m \cdot 100^{k^2}) Z_k A^1.$$

Lemat 24. *Dla dowolnego $k \geq 1$ mamy $I_k \subseteq B_k$.*

Powyższy lemat kończy część pracy, w której definiujemy odpowiednie przestrzenie liniowe nad K, ideały homogeniczne algebry A oraz przedstawiamy ich własności, które wykorzystujemy w dalszej części.

Z Lematu 24 wynika, że homogeniczny ideał $I = \sum_{k>0} I_k$ jest zawarty w przestrzeni $B = \sum_{k>0} B_k$. Rozważając powyższe konstrukcje, można zauważyś, że pierścień $R = A/I$ jest lokalnie nilpotentny oraz że możemy rozważać indukowane różniczkowanie na R, które oznaczamy także przez δ. Dodatkowo element $\overline{x_0}$, który jest obrazem elementu $x_0 \in A$ w R, jest niezerowy. Zatem możemy rozważyć niezerowy wielomian $\overline{x_0}x \in S = R[x;\delta]$. Ponieważ A jest w naturalny sposób $\mathbb{N}$-zgradowaną algebrą i I jest homogenicznym ideałem, to R jest również $\mathbb{N}$-zgradowany. Jeśli przyjmiemy, że x w pierścieniu S ma stopień 0, to widzimy, że S ma również $\mathbb{N}$-gradację. Zatem, jeśli S jest pierścieniem radykalnym Jacobsona, to homogeniczny element $\overline{x_0}x \in S$ musi być nilpotentny przez [60]. Kolejny raz, odwołując się do przedstawionego dotychczas materiału, w kolejnej nietrywialnej części pracy pokazujemy, że dla dowolnego n nie wszyskie współczynniki elementu $(\overline{x_0}x)^n$ należą do B, a co za tym idzie nie należą także do I. Zatem element $\overline{x_0}x$ nie jest nilpotentny. Trzeba i należy tu dodać, że kluczową rolę odgrywa w całej konstrukcji przestrzeń liniowa B i to z nią pracujemy podczas wykazywania faktu, że $\overline{x_0}x$ nie jest nilpotentny.

W omawianej pracy zadano następujące pytanie.

Pytanie 25. *Niech R będzie lokalnie nilpotentnym PI pierścieniem i niech δ będzie różniczkowaniem na R. Czy pierścień $R[x;\delta]$ jest wówczas radykalny Jacobsona?*

Ostatnio w pracy [6] Bell i inni udowodnili, że jeżeli R jest lokalnie nilpotentnym PI pierścieniem oraz δ jest różniczkowaniem na R, to $R[x;\delta]$ jest lokalnie nilpotentny. Wynik ten daje pozytywną odpowiedź na przedstawione powyżej pytanie.

Obecnie chcielibyśmy przedstawić inny wynik otrzymany w omawianej pracy, który podobnie jak poprzedni bezpośrednio wiąże się ze wspomnianym wcześniej wynikiem Amitsura. Zacznijmy od tego, że w pracy [19] wykazano, że dla dowolnego pierścienia R i różniczkowania δ na R zachodzi

$$J(R[x;\delta]) = (J(R[x;\delta]) \cap R)[x;\delta].$$

W momencie prowadzenia badań, których wyniki przedstawiono w prezentowanej pracy, otwartym pozostawało pytanie, czy $J(R[x;\delta]) \cap R$ jest zawsze nil ideałem. W jednej z najnowszych swoich prac [63] Agata Smoktunowicz pokazała, między innymi, że odpowiedź na wspomniane pytanie jest negatywna. Niemniej jednak w pewnych szczególnych przypadkach wykazano dotychczas, że odpowiedź jest pozytywna. Tak jest dla pierścieni przemiennych (praca [19]), dla pierścieni spełniających warunek łańcucha wstępującego na prawostronne anihilatory (praca [66]) oraz dla pierścieni spełniających tożsamość wielomianową (praca [6]). Ponadto w pracy [H7] udowodniono następujące.

Twierdzenie 26. *Jeśli R jest algebrą nad nieprzeliczalnym ciałem oraz δ jest lokalnie nilpotentnym różniczkowaniem na R, to $J(R[x;\delta]) \cap R$ jest nil ideałem w R.*

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych.

Poniższe publikacje przedstawiają wyniki, które nie weszły do zasadniczej części prezentowanego powyżej dorobku habilitanta, a które to wyniki zostały otrzymane po uzyskaniu przez niego stopnia naukowego doktora.

[D1] R. Mazurek, M. Ziembowski, On semilocal, Bezout and distributive generalized power series rings, Internat. J. Algebra Comput. 25 (2015), 725–744 (w spisie literatury pozycja [45]).

[D2] R. Mazurek, M. Ziembowski, On right McCoy rings and right McCoy rings relative to u.p.-monoids, Commun. Contemp. Math. 17 (2015), [10 pages] (w spisie literatury pozycja [44]).

[D3] M. Ziembowski, A note on zip rings, Acta Math. Hungar. 141 (1-2) (2013), 127-131 (w spisie literatury pozycja [74]).

[D4] M. Ziembowski, Regularity and strong regularity in the context of certain classes of rings, J. Algebra Appl. 12 (5) (2013), 1250205 (9 pages) (w spisie literatury pozycja [75]).

[D5] R. Mazurek, P.P. Nielsen, M. Ziembowski, The upper nilradical and Jacobson radical of semigroup graded rings, J. Pure Appl. Algebra 219 (2015), 1082–1094 (w spisie literatury pozycja [46]).

[D6] P.P. Nielsen, M. Ziembowski, Derivations and bounded nilpotence index, Internat. J. Algebra Comput. 25 (2015), 433–438 (w spisie literatury pozycja [54]).

Wszystkie prace omawiane w tej części dotyczą w dalszym ciągu rozszerzeń pierścieni nieprzemiennych i opisują pewne ich własności.

O pracy [D1].

Powiemy, że pierścień R jest *prawostronnie Bézout*, jeśli dowolny skończenie generowany prawostronny ideał tego pierścienie jest główny. W omawianej obecnie pracy badano warunki konieczne i wystarczające na to, aby pierścień uogólnionych szeregów potęgowych (definicja znajduje się w części poświęconej pracy [H3]) był prawostronnie Bezout i półlokalny (definicja tej klasy znajduje się w części, gdzie omawiana jest praca [H2]). W wielu kontekstach w takich pracach jak [9], [48] czy [70] pojawiają się właśnie pierścienie półlokalny i Bézout. Naszym celem i motywacją było dostarczenie narzędzi do konstruowania przykładów takich struktur. Udało się między innymi udowodnić następujące dwa główne twierdzenia:

Twierdzenie 27. *Niech R będzie pierścieniem a $(S, \cdot, \leq)$ ściśle liniowo uporządkowanym monoidem, który nie jest grupą. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *$R[[S]]$ jest półlokalny i prawostronnie (odpowiednio, lewostronnie) Bézout.*
(2) (a) *R jest półprosty i artinowski,*
 (b) *S jest prawostronnie (odpowiednio, lewostronnie) łańcuchowym monoidem,*
 (c) *Jeśli $s \in S$ i $s \leq 1$, to $s \in U(S)$.*

Twierdzenie 28. *Niech $(S, \cdot, \leq)$ będzie liniowo uporządkowaną grupą. Jeśli $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ jest skończonym produktem prostym pierścieni macierzy R_i nad artinowskimi pierścieniami łańcuchowymi, to pierścień uogólnionych szeregów potęgowych $R[[S]]$ jest półlokalny i Bézout.*

O pracy [D2].

Powiemy, że pierścień R jest prawostronnie McCoya [51], jeśli dla dowolnych $f(x), g(x) \in R[x]$, $f(x)g(x) = 0$ implikuje $f(x)a = 0$ dla pewnego niezerowego $a \in R$. Analogicznie definiuje się lewostronne pierścienie McCoya. Rozważana własność jest ogólniejszą od własności Armendariza, a motywacja do jej badania pochodzi z pracy [47], w której McCoy wykazał, że posiada ją dowolny pierścień przemienny. Wspomniany fakt wytyczył również kierunek badań nad pierścieniami McCoya. Mianowicie, pierwszymi klasami, które w tym kontekście się pojawiły, są pewne uogólnienia pierścieni przemiennych. Pierścień R nazywa się *odwracalnym* (ang. reversible ring), jeśli dla dowolnych $a, b \in R$, $ab = 0$ implikuje $ba = 0$. Nielsen w pracy [51] pokazał, że każdy pierścień odwracalny jest McCoya. W pracy [12] udowodniono, że każdy pierścień prawostronnie duo jest prawostronnie McCoya. Analogicznie, jak było to zrobione w przypadku pierścieni Armendariza w pracy [23], definicję pierścieni McCoya rozszerzono na pierścienie monoidowe. Analizując wyniki otrzymane w [23], widocznym staje się problem odpowiedzi na następujące pytanie: czy jeśli pierścień R jest prawostronnie duo, to dla dowolnego u.p. monoidu S, R jest prawostronnie S-McCoya? W pracy [D2] odpowiedziano na to pytanie pozytywnie. Ponadto w omawianej pracy skonstruowano przykład pierścienia R, który jest McCoya, a nie jest S-McCoya dla pewnego u.p. monoidu S. Pragniemy podkreślić tutaj, że przykład wspomnianego przed chwilą pierścienia R jest inny niż ten skonstruowany na potrzeby własności Armendariza, a zaprezentowany podczas omawiania pracy [H4]. Chociaż rozważany u.p. monoid jest ten sam.

O pracy [D3].

Przypomnijmy, że pierścień R nazywany jest *prawostronnym zip pierścieniem*, jesĺi dla dowolnego podzbioru $S \subseteq R$, jeśli prawostronny anihilator $r_R(S) = 0$, to $r_R(X) = 0$ dla pewnego skończonego podzbioru $X \subseteq S$.

W pracy [17] Faith przedstawił następujące problemy:

(1) Kiedy z faktu, że pierścień R jest zip, wynika, że $R[x]$ jest zip?

(2) Podać charakteryzację pierścieni R, dla których pierścienie macierzy $M_{n\times n}(R)$ są zip.

(3) Kiedy fakt, że pierścień R jest zip, imlikuje, że pierścień grupowy $R[G]$ jest zip, gdzie G jest grupą skończoną?

Powyższe pytania od momentu pojawienia się motywowały wiele badań. W [14] Cedo pokazał, że omawiana własność nie zachowuje się przy następujących konstrukcjach: pierścienie wielomianów, pierścienie macierzy oraz pierścienie grupowe dla grup skończonych. W pracy [25] Hong i inni wykazali między innymi, że jeśli R jest pierścieniem Armendariza, to R jest zip wtedy i tylko wtedy, gdy $R[x]$ jest zip. Ponadto pokazali, że jeśli R jest przemienny i M jest u.p. monoidem, to R jest zip wtedy i tylko wtedy, gdy $R[M]$ jest zip. Hashemi w [24] pokazał, że jeśli R jest odwracalnym pierścieniem, a S jest u.p. monoidem, to R jest zip wtedy i tylko wted, gdy $R[S]$ jest zip. Pokazał on także, że powyższa równoważność zachodzi, gdy R jest prawostronnie duo i S jest ściśle i liniowo uporządkowanym monoidem. W omawianej pracy udowodniono następujące.

Twierdzenie 29. *Jeśli R jest pierścieniem o prawostronnym wymiarze Goldiego równym jeden oraz S jest u.p. monoidem, to pierścień R jest zip wtedy i tylko wtedy, gdy $R[S]$ też jest zip*

O pracy [D4].

Przypomnijmy, że pierścień nazywa się *skończonym w sensie Dedekinda*, jeśli z faktu, że $ab = 1$ dla pewnych elementów $a, b \in R$, wynika równość $ba = 1$. Dalej, pierścień R nazywa się *prawostronnie quasi-morphic* (zob. [13]), jeśli dla dowolnego $a \in R$ istnieją $b, c \in R$ takie, że $aR = r_R(b)$

oraz $r_R(a) = cR$, gdzie $r_R(x)$ oznacza prawostronny anihilator elementu x. Podobnie definiujemy pierścienie lewostronnie quasi-morphic. Pierścień R nazywany jest *prawostronnie centralnie morphic* (zob. [34]), jeśli dla dowolnego $a \in R$ istnieje centralny element $c \in R$ taki, że $aR = r_R(b)$ oraz $bR = r_R(a)$. Lewostronnie centralnie morphic pierścienie definiowane są w analogiczny sposób. Wreszcie, powiemy, że pierścień R jest *prawostronnie (lewostronnie) gaussowski* (zob. [42]), jeśli dla dowolnych wielomianów $f, g \in R[x]$ zachodzi $c_r(f)c_r(g) = c_r(fg)$ ($c_l(f)c_l(g) = c_l(fg)$), gdzie dla dowolnego wielomianu $h \in R[x]$ przez $c_r(h)$ ($c_l(h)$) oznaczamy prawostronny (lewostronny) ideał pierścienia R generowany przez współczynniki wielomianu h.

Główne motywacje do przeprowadzenia badań związanych z omawianą pracą pochodzą z [42] i [69], a wykazano w niej następujące fakty.

Twierdzenie 30. *Jeśli pierścień R jest skończony w sensie Dedekinda, to dla dowolnego $n \geq 1$ następujące warunki są równoważne:*

(1) $R[x]/(x^{n+1})$ *jest prawostronnie Bézout.*
(2) $R[x]/(x^{n+1})$ *jest lewostronnie Bézout.*
(3) $R[x]/(x^{n+1})$ *jest prawostronnie quasi-morphic.*
(4) $R[x]/(x^{n+1})$ *jest lewostronnie quasi-morphic.*
(5) R *is regularny (w sensie von Neumanna).*

Twierdzenie 31. *Dla dowolnego pierścienia R, następujące warunki są równoważne:*

(1) $R[x]/(x^{n+1})$ *jest prawostronnie gaussowski.*
(2) $R[x]/(x^{n+1})$ *jest lewostronnie gaussowski.*
(3) $R[x]/(x^{n+1})$ *jest prawostronnie rozdzielny.*
(4) $R[x]/(x^{n+1})$ *jest lewostronnie rozdzielny.*
(5) $R[x]/(x^{n+1})$ *jest prawostronnie centralnie morphic.*
(6) $R[x]/(x^{n+1})$ *jest lewostronnie centralnie morphic.*
(7) R *is regularny i zredukowany.*

O pracy [D5].

Motywacje do prac nad materiałem, który składa się na omawiany obecnie artykuł związane są z [35] i [61]. W drugiej z tych prac znajdujemy następujące pytania:

Pytanie A. Dla których półgrup S nil radykał $N(R)$ dowolnego pierścienia R z S-gradacją jest homogeniczny?

Pytanie B. Dla jakich półgrup S podpierścienie generowane przez homogeniczne elementy S-zgradowanych pierścieni radykalnych Jacobsona są radykalne Jacobsona?

Trzeba w tym miejscu wspomnieć, że w pracy [61] Smoktunowicz udowodniła, że jeśli R jest pierścieniem z $\mathbb{Z}$-gradacją, to nil radykał $N(R)$ jest homogeniczny. Ponadto Smoktunowicz we wspomnianej pracy i niezależnie Lee i Puczyłowski w [35] wykazali, że jeśli R jest pierścieniem radykalnym Jacobsona i zgradowanym przez addytywną półgrupę liczb naturalnych, to każdy generowany przez elementy homogeniczne podpierścień R jest radykalny Jacobsona.

Przechodzimy obecnie do przedstawienia wyników otrzymanych w omawianej pracy. Powiemy, że funkcja f jest ideałowa, jeśli dowolnemu pierścieniowi R przyporządkowuje ona pewien ideał $f(R)$ tego pierścienia. Oczywistym jest, że radykały w sensie Kurosha-Amitsura są takimi funkcjami, przy czym wprowadzone pojęcie jest ogólniejsze, co widzimy rozważając funkcję, która przyporządkowuje dowolnemu pierścieniowi R sumę algebraiczną wszystkich jego ideałów nilpotentnych. Wiadomo jest, że suma taka nie jest radykałem w sensie Kurosha-Amitsura.

Definicja 32. (Ściśnięta funkcja ideałowa). Niech C będzie klasą pierścieni zamkniętą na izomorfizmy i niech F i G będą funkcjami ideałowymi. Powiemy, że funkcja F jest G-C-ściśnięta, jeśli dla dowolnego pierścienia R mamy $G(R) \subseteq F(R)$ oraz $F(R) \subseteq I$ dla dowolnego ideału I pierścienia R takiego, że $R/I \in C$.

Niech R będzie pierścieniem, który niekoniecznie posiada jedynkę. Rozważmy lewostronny anihilator $\ell_R(R) = \{a \in R : aR = 0\}$ pierścienia R. W podobny sposób definujemy prawostronny anihilator $r_R(R)$. Oczywiście w przypadku, gdy pierścień R posiada element neutralny ze względu na mnożenie, powyższe zbiory są niczym innym jak zbiorem jednoelementowym równym $\{0\}$. Dlatego też pierścienie pojawiające się w obecnie omawianym fragmencie nie muszą posiadać jedynki. Ostatecznie definiujemy zbiór $ann(R) = \ell_R(R) + r_R(R)$, który w oczywisty sposób jest ideałem R. Oczywistym także jest, że ann, ℓ_- i r_- są funkcjami ideałowymi. Pierwszy z rezultatów otrzymany w omawianej pracy jest następujący.

Twierdzenie 33. *Niech S będzie półgrupą i niech F będzie ℓ_--C-ściśniętą funkcją, gdzie C jest dowolną izomorficznie domkniętą klasą pierścieni zawierającą niezredukowany pierścień R_0. Jeśli dla dowolnego S-zgradowanego pierścienia R ideał $F(R)$ jest homogeniczny, to S jest półgrupą z prawostronnym skracaniem (tzn. dla dowolnych $s, t, u \in S$, $su = tu$ implikuje $s = t$).*

Jako główne wnioski z powyższego otrzmujemy.

Wniosek 34. [15, Twierdzenie 9] *Jeśli S jest półgrupą, dla której radykał Jacobsona $J(R)$ jest homogeniczny dla dowolnego S-zgradowanego pierścienia R, to S jest półgrupą ze skracaniem.*

Wniosek 35. *Jeśli S jest półgrupą, dla której nilradykał $N(R)$ jest homogeniczny dla dowolnego S-zgradowanego pierścienia R, to S jest ze skracaniem.*

W kolejnej części pracy odpowiadamy częściowo na Pytanie A dowodząc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 36. *Niech S będzie półgrupą przemienną. Wówczas, nilradykał $N(R)$ jest homogeniczny dla dowolnego S-zgradowanego pierścienia R wtedy i tylko wtedy, gdy S jest beztorsyjną półgrupą ze skracaniem.*

Podobny rezultat otrzymujemy dla ogranicznonego nilradykału $B(R)$ pierścienia R, który definiuje się następująco:

$$B(R) = \{a \in R : \text{ istnieje } n > 0 \text{ takie, że } x^n = 0 \text{ dla dowolnego } x \in aR\}.$$

Radykał ten rozważany był między innymi w [52]. W omawianej pracy udowodniono.

Twierdzenie 37. *Niech S będzie półgrupą przemienną. Ograniczony nilradykał $B(R)$ jest homogeniczny dla dowolnego S-zgradowanego pierścienia R wtedy i tylko wtedy, gdy S jest beztorsyjną półgrupą ze skracaniem.*

Korzystając z konstrukcji podobnej w swej istocie do konstrukcji pierścienia uogólnionych szeregów potęgowych, w omawianej pracy udowodniono poniższe twierdzenie, które daje częściową odpowiedź na Pytanie B.

Twierdzenie 38. *Niech S będzie półgrupą taką, że każda skończenie generowana jej podpółgrupa T spełnia $\bigcap_{n\geq 1} T^n = \emptyset$. Jeśli A jest homogenicznym podpierścieniem S-zgradowanego pierścienia, to $J(R) \cap A \subseteq J(A)$. W szczególności, jeśli R jest radykalny Jacobsona, to A również taki jest.*

Ponieważ dla addytywnej półgrupy $\mathbb{N}$ mamy $\bigcap_{n\geq 1} \mathbb{N}^n = \emptyset$, [35, Twierdzenie 5.9] i [61, Propozycja 0.1] można widzieć jako wnioski z powyższego twierdzenia.

Okazuje się, że półgrupy z przedstawioną w powyższym rezultacie własnością nie są najogólniejszą klasą dla której Pytanie B ma pozytywną odpowiedź. Prawdziwa mianowicie jest następująca propozycja.

Propozycja 39. *Niech S będzie półgrupą, która jest rozłaczną sumą podpółgrup S_1 i S_2 oraz niech S_2 będzie ideałem S. Niech ponadto $R = \bigoplus_{s\in S} R_s$ będzie S-zgradowanym pierścieniem. Wówczas każdy podpierścień pierścienia R generowany przez pewne jego homogeniczne elementy, jest radykalny Jacobsona wtedy i tylko wtedy, gdy tę własność posiadają pierścienie $R_1 = \bigoplus_{s\in S_1} R_s$ i $R_2 = \bigoplus_{s\in S_2} R_s$.*

Przykład 40. *Istnieje skończenie generowana półgrupa S ze skracaniem, dla której $\bigcap_{n\geq 1} S^n \neq \emptyset$, oraz dla dowolnego S-zgradowanego pierścienie R, który jest radykalny Jacobsona, dowolny jego podpierścień generowany przez pewne elementy homogeniczne R jest również radykalny Jacobsona.*

Powiemy, że półgrupa spełnia warunek ACCPL, jeśli spełnia ona warunek łańcucha wstępującego ze względu na lewostronne ideały główne (półgrupy z tym warunkiem rozważane były między innymi w [41] i [65]). Analogicznie definiuje się warunek ACCPR. W ostatniej części pracy poświęconej własnościom półgrup udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 41. *Niech S będzie półgrupą. Rozważmy następujące własności:*

(1) *Jeśli S jest generowana przez $T \subseteq S$, to dla dowolnego $s \in S$ zbiór $\{n \in \mathbb{N} : s \in T^n\}$ jest skończony.*
(2) $\bigcap_{n\geq 1} S^n = \emptyset$.
(3) *Dla dowolnego przeliczalnego ciągu $s_1, s_2, \dots \in S$ mamy $\bigcap_{n\geq 1} s_1 s_2 \cdots s_n S = \emptyset$.*
(4) *S spełnia warunek ACCPL oraz S nie posiada idempotentów.*

Zachodzą następujące implikacje (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4), *oraz inne implikacje w ogólności nie są prawdziwe. Natomiast, jeśli S jest skończenie generowaną półgrupą, mamy dodatkowo* (3) $\Rightarrow$ (1), *a jeśli S jest ze skracaniem, mamy* (4) $\Rightarrow$ (3).

O pracy [D6].

Mowa będzie tu o pierścieniach które nie muszą posiadać jedynki.

Jak już wcześniej przedstawiono, w pracy [H7] razem ze Smoktunowicz skonstruowaliśmy lokalnie nilpotentny pierścień R z różniczkowaniem δ taki, że $R[x;\delta]$ nie jest radykalny Jacobsona. Sytuacja ta jest diametralnie różna w stosunku do zwykłych wielomianów. Dobrze znany fakt mówi, że jeśli R jest lokalnie nilpotentnym pierścieniem, to $R[x]$ też taki jest. Z drugiej strony Bell i inni w [6] pokazali ostatnio, że w przypadku gdy R jest lokalnie nilpotentny oraz spełnia tożsamość wielomianową, to $R[x;\delta]$ jest lokalnie nilpotentny.

W obecnie omawianym artukule został skonstruowany przemienny pierścień R ograniczonego nil indeksu 2. Pokazano, że dla R istnieje różniczkowanie δ tego pierścienia, dla którego pierścień wielomianów z różniczkowaniem $R[x;\delta]$ nie jest radykałem pierwszym. Co więcej $\beta(R[x;\delta]) = 0$. Oczywiście przez [6] pierścień $R[x;\delta]$ jest lokalnie nilpotentny, skoro pierścienie ograniczonego nil indeksu są PI.

Ponadto zaprezentowane w artykule wyniki jawią się jako interesujące także w kontekście znanego faktu mówiącego o tym, że jeśli pierścień A jest ograniczonego nil indeksu, to $A[x]$ również tę własność posiada. W oczywisty sposób wspomniana wcześniej konstrukcja pokazuje, że zaprezentowany transfer nie działa w przypadku pierścieni wielomianów z różniczkowaniem.

References

[1] S.A. Amitsur, Radicals of polynomial rings, Canad. J. Math. 8 (1956), 335–361.

[2] D.D. Anderson, V. Camillo, Armendariz rings and Gaussian rings, Comm. Algebra 26 (1998), 2265–2272.

[3] R. Antoine, Nilpotent elements and Armendariz rings, J. Algebra 319 (2008), 3128–3140.

[4] E.P. Armendariz, A note on extensions of Baer and P.P.-rings, J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), 470–473.

[5] Jason P. Bell, Agata Smoktunowicz, The prime spectrum of algebras of quadratic growth, J. Algebra 319 (2008), 414–431.

[6] J.P. Bell, B.W. Madill, F. Shinko, Differential polynomial rings over rings satisfying a polynomial identity, J. Algebra 423 (2015), 28–36.

[7] G.M. Bergman, On Jacobson radicals of graded rings, Unpublished work (1975), 10 pp., available at http://math.berkeley.edu/ gbergman/papers/unpub.

[8] G.F. Birkenmeier, J.K. Park, Triangular matrix representations of ring extensions, J. Algebra 265 (2003), 457–477.

[9] H. H. Brungs, J. Gräter, Orders of higher rank in semisimple Artinian rings, Math. Nachr. 182 (1996), 73–88.

[10] V.P. Camillo, H.P. Yu, Exchange rings, units and idempotents, Comm. Algebra 22 (1994), 4734–4749.

[11] V.P. Camillo, D. Khurana, A Characterization of Unit Regular Rings, Comm. Algebra 29 (2001), 2293–2295.

[12] V. Camillo, P.P. Nielsen, McCoy rings and zero-divisors, J. Pure Appl. Algebra 212 (2008), 599–615.

[13] V. Camillo, W.K. Nicholson, Left quasi-morphic rings, J. Algebra Appl. 7 (2008), 725–733.

[14] F. Cedò, Zip rings and Malcev domains, Comm. Algebra 19 (1991), 1983–1991.

[15] M.V. Clase, A.V. Kelarev, Homogeneity of the radical of semigroup-graded rings, Comm. Algebra 22 (1994), 4963–4975.

[16] A.J. Diesl, C.Y. Hong, N.K. Kim, and P.P. Nielsen, Properties which do not pass to classical rings of quotients, J. Algebra 379 (2013), 208–222.

[17] C. Faith, Annihilators ideals, associated primes and Kasch-McCoy commutative ring, Comm. Algebra 19 (1991), 1967–1982.

[18] E.H. Feller, Properties of primary noncommutative rings, Trans. Amer. Math. Soc. 89 (1958), 79–91.

[19] M. Ferrero, K. Kishimoto, K. Motose, On radicals of skew polynomial rings of derivation type, J. London Math. Soc. (2) 28 (1983), 8–16.

[20] M. Ferrero, A. Sant'Ana, On distributive modules and rings, Result. Math. 44 (2003), 74–85.

[21] K.R. Goodearl, R.B. Warfield Jr, Algebras over zero-dimensional rings, Math. Ann. 223 (1976), 168–187.

[22] Be'eri Greenfeld, André Leroy, Agata Smoktunowicz, Michał Ziembowski, Chains of Prime Ideals and Primitivity of $\mathbb{Z}$-Graded Algebras, Algebras Repres. Theory 18 (2015), 777–800.

[23] E. Hashemi, McCoy rings relative to a monoid, Comm. Algebra 38 (2010), 1075–1083.

[24] E. Hashemi, Extensions of zip rings, Studia Sci. Math. Hung. 47 (2010), 522–528.

[25] C. Y. Hong, N. Y. Kim, T. K. Kwak and Y. Lee, Extensions of zip rings, J. Pure Appl. Algebra 195 (2005), 231–242.

[26] C. Huh, Y. Lee, A. Smoktunowicz, Armendariz and semicommutative rings, Comm. Algebra 30 (2002), 751–761.

[27] E. Jespers, J. Krempa, E.R. Puczyłowski, On radicals of graded rings, Comm. Algebra 10 (1982), 1849-1854.

[28] E. Jespers, E. R. Puczyłowski, The Jacobson and Brown-McCoy radicals of rings graded by free groups, Comm. Algebra 19 (1991), 551–558.

[29] N.K. Kim, Y. Lee, Armendariz rings and reduced rings, J. Algebra 223 (2000), 477–488.

[30] J. Krempa, Logical connections among some open problems concerning nil rings, Fund. Math. 76 (1972), 121–130.

[31] T.Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings. Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag, New York, 1999.

[32] T.Y. Lam, Lectures on Modules and Rings, Grad. Texts Math., vol. 189, Springer-Verlag, NewYork, 1999.

[33] Z. Liu, Armendariz rings relative to a monoid, Comm. Algebra 33 (2005), 649–661.
[34] T.K. Lee, Y. Zhou, Regularity and morphic property of rings, J. Algebra 322 (2009), 1072–1085.
[35] P.-H. Lee and E.R. Puczyłowski, On prime ideals and radicals of polynomial rings and graded rings, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 323–332.
[36] G. Marks, On 2-primal Ore extensions, Comm. Algebra 29 (2001), 2113–2123.
[37] G. Marks, A taxonomy of 2-primal rings, J. Algebra 266 (2003), 494–520.
[38] G. Marks, R. Mazurek, M. Ziembowski, A new class of unique product monoids with applications to ring theory, Semigroup Forum 78 (2009), 210–225.
[39] G. Marks, R. Mazurek, M. Ziembowski, A unified approach to various generalizations of Armendariz rings, Bull. Aust. Math. Soc. 81 (2010), 361–397.
[40] R. Mazurek, M. Ziembowski, On Bézout and distributive generalized power series rings, J. Algebra 306 (2006), 387–401.
[41] R. Mazurek, M. Ziembowski, The ascending chain condition for principal left or right ideals of skew generalized power series rings, J. Algebra 322 (2009), 983–994.
[42] R. Mazurek, M. Ziembowski, Right Gaussian rings and skew power series rings, J. Algebra 330 (2011), 130–146.
[43] R. Mazurek, M. Ziembowski, On a characterization of distributive rings via saturations and its applications to Armendariz rings and Gaussian rings, Rev. Mat. Iberoam. 30 (2014), 1073–1088.
[44] R. Mazurek, M. Ziembowski, On right McCoy rings and right McCoy rings relative to u.p.-monoids, Commun. Contemp. Math. 17 (2015), [10 pages].
[45] R. Mazurek, M. Ziembowski, On semilocal, Bezout and distributive generalized power series rings, Internat. J. Algebra Comput. 25 (2015), 725–744.
[46] R. Mazurek, P.P. Nielsen, M. Ziembowski, The upper nilradical and Jacobson radical of semigroup graded rings, J. Pure Appl. Algebra 219 (2015), 1082–1094.
[47] N.H. McCoy, Remarks on divisors of zero, Amer. Math. Monthly 49 (1942), 286–295.
[48] H. Miyamoto, A. Ueda, Y. Zhao, H. Marubayashi, On semi-local Bezout orders and strongly Prüfer orders in a central simple algebra, Math. Jap. 43 (1996), 377–382.
[49] P. J. Morandi, An approximation theorem for Dubrovin valuation rings, Math. Z. 207 (1991), 71–81.
[50] W.K. Nicholson, Lifting idempotents and exchange rings, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 269–278.
[51] P.P. Nielsen, Semi-commutativity and the McCoy condition, J. Algebra 298 (2006), 134–141.
[52] P.P. Nielsen, Bootstrapping the bounded nilradical, J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), 1711–1715.
[53] P.P. Nielsen, R. Mazurek, M. Ziembowski, The upper nilradical and Jacobson radical of semigroup graded rings, J. Pure Appl. Algebra 219 (2015), 1082–1094.
[54] P.P. Nielsen, M. Ziembowski, Derivations and bounded nilpotence index, Internat. J. Algebra and Comput. 25 (2015), 433–438.
[55] J. Okninski, Semigroup Algebras, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 138, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.
[56] E. R. Puczyłowski, A. Smoktunowicz, On maximal ideals and the Brown-McCoy radical of polynomial rings, Comm. Algebra 26 (1998) 2473–2482.
[57] K.I. Sonin, Semiprime and semiperfect rings of Laurent series, Math. Notes 60 (1996), 222–226.
[58] M.B. Rege, S. Chhawchharia, Armendariz rings, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 73 (1997), 14–17.
[59] P. Ribenboim, Semisimple rings and von Neumann regular rings of generalized power series, J. Algebra 198 (1997), 327–338.
[60] A. Smoktunowicz, The Jacobson radical of rings with nilpotent homogeneous elements, Bull. London Math. Soc. 40 (2008), 917–928.
[61] A. Smoktunowicz, A note on nil and Jacobson radicals in graded rings, J. Algebra Appl. 13 (2014), [8 pages].

[62] A. Smoktunowicz, M. Ziembowski, Differential polynomial rings over locally nilpotent rings need not be Jacobson radical, J. Algebra 412 (2014), 207 – 217.

[63] A. Smoktunowicz, How far can we go with Amitsur's theorem? http://arxiv.org/abs/1504.01341 (2015).

[64] W. Stephenson, Modules whose lattice of submodules is distributive, Proc. Lond. Math. Soc. 28 (1974), 291–310.

[65] N. Stopar, Ascending chain conditions on principal left and right ideals for semidirect products of semigroups, Semigroup Forum 85 (2012), 322–336.

[66] Y-T Tsai, T-YWu, C-L Chuang, Jacobson radicals of Ore extensions of derivation type, Comm. Algebra 35 (2007), 975–982.

[67] A.A. Tuganbaev, Semidistributive rings and modules, Mathematics and Its Applications, Vol. 449, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[68] A.A. Tuganbaev, Distributive modules and related topics, Algebra, Logic and Applications. 12. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1999.

[69] A.A. Tuganbaev, Bezout rings, polynomials, and distributivity, Mathematical Notes 70 (2001), 242–257.

[70] B. V. Zabavs'kii, Reduction of matrices over Bezout rings of stable rank at most 2 (Ukrainian), Ukrain. Mat. Zh. 55 (2003), 550–554; translation in Ukrainian Math. J. 55 (2003), 665–670.

[71] C.-P. Zhang, J.-L. Chen, α-skew Armendariz modules and α-semicommutative modules, Taiwanese J. Math. 12 (2008), 473–486.

[72] Y. Zhou, M. Ziembowski, On clean Laurent series rings, J. Aust. Math. Soc. 95 (2013), 421–427.

[73] Y. Zhou, M. Ziembowski, Distributive modules and Armendariz modules, J. Math. Soc. Japan 67 (2015), 789–796.

[74] M. Ziembowski, A note on zip rings, Acta Math. Hungar. 141 (2013), 127-131.

[75] M. Ziembowski, Regularity and strong regularity in the context of certain classes of rings, J. Algebra Appl. 12 (2013), 1250205 (9 pages).

[76] M. Ziembowski, Laurent series ring over semiperfect ring can not be semiperfect, Comm. Algebra 42 (2014), 664–666.

[77] M. Ziembowski, On classical rings of quotients of duo rings, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 919–924.