Egzamin z Analizy Matematycznej I
Część 1- teoria

(1)
(2p) Podać definicję kresu dolnego zbioru.
(2p) Podać definicję kresu dolnego funkcji.
(3p) Czy dla dowolnych funkcji ograniczonych $f, g : D \to \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość

$$\inf_{x\in D} f(x) + \inf_{x\in D} g(x) = \inf_{x\in D}(f(x) + g(x)) \ ?$$

Odpowiedź uzasadnić.

(2)
(2p) Czy ciągi o wyrazach $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+4}}$ i $b_n = \frac{1}{[\sqrt{n+4}]}$ (gdzie $[\cdot]$ to część całkowita) są podciągami ciągu $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$? Odpowiedź uzasadnić.
(2p) Podać przykład ciągu (wzór na n-ty wyraz), który ma co najmniej dwa podciągi zbieżne do różnych granic. Czy taki ciąg może być zbieżny?
(2p) Podać definicję granicy ciągu.
(2p) Sformułować twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.

(3)
(3p) Podać definicję pochodnej funkcji w punkcie. Bezpośrednio z definicji wyprowadzić wzór na pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie $x_0 \neq 0$.
(4p) Wyprowadzić wzór na pochodną iloczynu funkcji różniczkowalnych.

(4)
(2p) Podać definicję maksimum lokalnego.
(2p) Czy z tego, że $f'(x_0) = 0$ wynika, że f ma ekstremum lokalne w x_0? Odpowiedź uzasadnić (przytoczyć odpowiednie twierdzenie lub podać kontrprzykład).
(2p) Podać definicję funkcji wypukłej.
(2p) Podać warunek konieczny i dostateczny wypukłości funkcji różniczkowalnej.

Część 2 - zadania

Zadanie 1.(8p) Obliczyć granice

$$\textbf{(a)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^{2n} \qquad \textbf{(b)} \quad \lim_{x\to 0} x^{-6}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Zadanie 2. (7p) Niech ciąg x_n będzie określony wzorem

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}(1 + x_{n-1}^2) & \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}, \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że ciąg x_n jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

Zadanie 3.(8p) Wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = x\sin(\ln x)$.

Zadanie 4.(7p) Obliczyć

$$\int \frac{\cos x \; dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}.$$