MATEMATYKA DYSKRETNA - wykład 10

dr inż. Krzysztof Bryś

Elementy teorii grafów.

Co to jest graf?

Grafem (*grafem prostym, grafem niezorientowanym*) nazywamy parę (V, E) gdzie V jest pewnym zbiorem zwanym *zbiorem wierzchołków*, natomiast E jest zbiorem pewnych par nieuporządkowanych elementów ze zbioru V zwanym *zbiorem krawędzi. Krawędzią* w grafie nazywamy nieuporządkowaną parę wierzchołków.

Grafem zorientowanym (*grafem skierowanym*) nazywamy parę (V, E) gdzie V jest pewnym zbiorem zwanym *zbiorem wierzchołków*, natomiast E jest zbiorem pewnych par uporządkowanych elementów ze zbioru V zwanym *zbiorem krawędzi. Krawędzią* w grafie zorientowanym nazywamy uporządkowaną parę wierzchołków.

Jeżeli krawędziom grafu przypisane są liczby zwane wagami, to graf taki nazywamy *grafem ważonym.*

Podstawowe pojęcia

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Zbiór wierzchołków grafu G oznaczamy przez $V(G)$ a liczbę wierzchołków grafu G przez $|G|$. Zbiór krawędzi grafu G oznaczamy przez $E(G)$ a liczbę krawędzi grafu G przez $e(G)$.

Jeżeli $e = \{x, y\}$ jest krawędzią w grafie G (czyli x, y są wierzchołkami grafu G, to mówimy, że e jest krawędzią o końcach x, y i piszemy krótko $e = xy$. Zatem, jesli x i y są wierzchołkami w grafie G, to xy oznacza krawędź o końcach x, y. Jeżeli taka krawędź istnieje to mówimy, że wierzchołki x i y *sąsiadują* albo, że są połączone krawędzią a krawędź $e = xy$ jest *incydentna* do wierzchołków x i y.

Dwa grafy nazywamy *izomoficznymi* jeśli istnieje pomiędzy nimi *izomorfizm grafów* czyli bijekcja pomiędzy ich zbiorami wierzchołków, która zachowuje krawędzie (to znaczy dwa wierzchołki w jednym z tych grafów są połączone krawędzia wtedy i tylko wtedy gdy odpowiadające im wierzchołki w drugim z grafów też są połączone krawędzią).

Intuicyjnie, dwa grafy są izomorficzne jeśli dają się narysować w ten sam sposób czyli gdy mają wspólny rysunek.

Podgrafem grafu G nazywamy graf H taki, że $V(H) \subseteq V(G)$ oraz $E(H) \subseteq E(G)$. Ze względu na to, że graf jest strukturą złożoną z dwóch rodzaji elementów (wierzchołków i krawędzi) wyróżniamy dwa rodzaje podgrafów indukowanych.

Podgrafem indukowanym w grafie G przez zbiór wierzchołków $V' \subseteq V(G)$ nazywamy graf, którego zbiorem wierzchołków jest V' a zbiór krawędzi składa się z tych krawędzi grafu G, które mają oba końce w V'.

Podgrafem indukowanym w grafie G przez zbiór krawędzi $E' \subseteq E(G)$ nazywamy graf, którego zbiorem krawędzi jest E' a zbiór wierzchołków składa się z tych wierzchołków grafu G, które są końcami co najmniej jednej krawędzi z E'.

Podgrafem rozpinającym grafu G nazywamy dowolny podgraf H grafu G, dla którego $V(H) = V(G)$.

Stopniem wierzchołka v *w grafie* G nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z tego wierzchołka (krawędzi których jest końcem) czyli liczbę jego sąsiadów i zapisujemy $deg_G(v)$

Minimalny stopień wierzchołka w grafie G oznaczamy przez $\delta(G)$. Czyli:

$$\delta(G) = \min\{deg_G(v) : v \in V(G)$$

Maksymalny stopień wierzchołka w grafie G oznaczamy przez $\Delta(G)$. Czyli:

$$\Delta(G) = \min\{deg_G(v) : v \in V(G)$$

Fakt *W dowolnym grafie* G *suma stopni wierzchołków jest równa podwojonej liczbie krawędzi*

Wnioskiem stąd jest fakt, że suma stopni wierzchołków musi być liczbą parzystą.

Grafem pełnym o n *wierzchołkach* nazywamy graf w którym jest n wierzchołków i każde dwa z nich są połączone krawędzią. Dla ustalonego n każdy graf pełny daje się narysować w ten sam sposób. Graf pełny o n wierzchołkach oznaczamy przez K_n.

Ścieżką w grafie G nazywamy ciąg wierzchołków $v_0, v_1, \dots v_k$ taki, że każde dwa kolejne wierzchołki w tym ciągu są połączone krawędzią.
Ścieżką zamkniętą w grafie G nazywamy siceżkę $v_0, v_1, \dots v_k$ taką, że $v_0 = v_k$.
Drogą w grafie G nazywamy ścieżkę, na której żaden wierzchołek nie pojawia się więcej niż raz. Drogę o n wierzchołkach oznaczamy przez P_n
Cyklem w grafie G nazywamy ścieżkę zamkniętą, na której żaden wierzchołek, za wyjątkiem początkowego i końcowego, nie pojawia się więcej niż raz. Cykl o n wierzchołkach oznaczamy przez C_n

Graf G nazywamy *spójnym* jeśli między każdą parą wierzchołków w tym grafie istnieje droga. Inticyjnie, graf spójny to taki, który daje się narysować w jednym "kawałku". Taki spójny "kawałek" grafu nazywamy składową spójności grafu. Formalnie rzecz biorąc, *składową spójności* grafu G nazywamy maksymalny podgraf spójny grafu G. Każdy graf spójny ma dokładnie jedną składową spójności.

Przez $G \setminus v$ oznaczmy graf otrzymany z G przez usunięcie wierzchołka v. Usuwając wierzchołek usuwamy wszystkie krawędzie z niego wychodzące. Przez $G \setminus e$ oznaczmy graf otrzymany z G przez usunięcie krawędzi e. W grafie takim pozostają wszystkie wierzchołki. Jeśli V' jest podzbiorem $V(G)$, to przez $G \setminus V'$ oznaczamy graf, który powstaje z G przez usunięcie wszystkich wierzchołków należących do V' oraz wszystkich krawędzi, które mają co najmniej jeden koniec w V'.

Drzewa i lasy

Lasem nazywamy dowolny graf, który nie zawiera cykli.
Drzewem nazywamy dowolny graf spójny, który nie zawiera cykli. Można zatem powiedzieć, że drzewo to spójny las.

Każdy wierzchołek o stopniu 1 w drzewie nazywamy *lisciem.* Natomiast *mostem* w grafie spójnym nazywamy dowolną krawędź, której usunięcie powoduje, że otrzymany graf jest niespójny.

Wymienimy teraz kilka własności drzew.

Jeżeli T jest drzewem, to
1) dowolne dwa wierzchołki w T są połączone dokładnie jedną drogą.
2) $e(T) = |T| - 1$.
3) Każda krawędź w T jest mostem.
4) W drzewie T o co najmniej dwóch wierzchołkach są co najmniej dwa liście.

Cykle w grafach

Ścieżką Eulera w grafie G nazywamy ścieżkę, która przechodzi przez każdą krawędź grafu G dokłdnie raz. *Ścieżką zamkniętą Eulera* albo *Cyklem Eulera* w grafie G nazywamy ścieżkę zamkniętą, która przechodzi przez każdą krawędź grafu G dokłdnie raz.

Euler, w 1736 roku, sformułował warunki równoważne istnieniu cyklu Eulera w grafie. Podane przez niego twierdzenie uważane jest za historycznie pierwsze twierdzenie teorii grafów.

Twierdzenie Eulera *Graf spójny G ma cykl Eulera $\Leftrightarrow$ każdy wierzchołek w grafie G ma parzysty stopień.*

Wniosek *Graf spójny G ma ściezkę Eulera $\Leftrightarrow$ każdy wierzchołek w grafie G, za wyjątkiem* 0 *lub* 2 *wierzchołków, ma parzysty stopień.*

Drogą Hamiltona w grafie G nazywamy drogę, która przechodzi przez każdy wierzchołek tego grafu.

Cyklem Hamiltona w grafie G nazywamy cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek tego grafu.

Kolorowanie grafów

W grafach możemy mówić zarówno o kolorowaniu krawędzi jak i o kolorowaniu wierzchołków. Z punktu widzenia zastosowań istotne jest badanie pewnych szczególnych kolorowań zwanych dobrymi.

k-pokolorowaniem wierzchołków grafu G nazywamy dowolną funkcję, która każdemu wierzchołkowi grafu G przypisuje liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots k\}$.

k-pokolorowanie wierzchołków grafu nazywamy *dobrym* jeśli każde dwa wierzchołki połączone krawędzią mają rózne kolory.

Minimalną liczbę kolorów potrzebną do dobrego pokolorowania wierzchołków grafu G nazywamy *liczbą chromatyczną* grafu G i oznaczamy przez $\chi(G)$.

Graf G nazywamy *dwudzielnym* jeśli jego zbiór wierzchołków można podzielić na takie dwa podzbiory zwane *klasami dwudzielności*, że dowolna krawędź w grafie G ma jeden koniec w jednej a drugi w drugiej klasie dwudzielności.

Oczywiście dla dowolnego grafu dwudzielnego G, który zawiera co najmniej jedną krawędź $\chi(G) = 2$.

Dla grafów pełnych $\chi(K_n) = n$ bo każdy wierzchołek trzeba pokolorować innym kolorem. Dla cykli $\chi(C_n) = 2$ jeśli n jest parzyste oraz $\chi(C_n) = 3$ jeśli n jest nieparzyste.

Twierdzenie Brooksa *Dla dowolnego grafu G, który nie jest grafem pełnym ani cyklem o nieparzystej liczbie wierzchołków:* $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

k-pokolorowaniem krawędzi grafu G nazywamy dowolną funkcję, która każdej krawędzi przypisuje liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots k\}$.

k-pokolorowanie krawędzi grafu nazywamy *dobrym* jeśli każde dwie krawędzie o wspólnym końcu mają rózne kolory.

Minimalną liczbę kolorów potrzebną do dobrego pokolorowania krawędzi grafu G nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu G i oznaczamy przez $\chi'(G)$.

Twierdzenie Vizinga *Dla dowolnego grafu G:* $\chi'(G) = \Delta(G)$ *albo* $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Jeśli G jest grafem dwudzielnym, to $\chi'(G) = \Delta(G)$. Dla grafów pełnych: $\chi'(K_n) = n$ jeśli n jest nieparzyste oraz $\chi'(K_n) = n - 1$ jeśli n jest parzyste.

Zarówno problem znalezienia liczby chromatycznej jak i problem znalezienia indeksu chromatycznego grafu są problemami trudnymi w sensie złożoności obliczeniowej.

Grafy płaskie

Graf G nazywamy *płaskim* jeśli można go narysować w taki sposób, że krawędzie przecinają się jedynie w wierzchołkach będących ich końcami. Taki rysunek grafu nazywamy *reprezentacją płaską* grafu G.