MATEMATYKA DYSKRETNA - wykład 6
dr inż. Krzysztof Bryś

Zasada włączania-wyłączania. Nieporządki

Problem znalezienia liczności sumy n zbiorów
Dane: zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$
Szukane: Liczność sumy tych zbiorów czyli $|A_1 \cup A_2 \cup A_n|$.

Równoważna postać problemu znalezienia liczności sumy n zbiorów
Dane: Uniwersum U oraz zbiór własności $1, 2, \ldots, n$ elementów uniwersum (każdy element albo posiada albo nie posiada i-tej własności, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Szukane: Liczba tych elementów uniwersum, które posiadają co najmniej jedną spośród własności $1, 2, \ldots, n$.

Przypadek $n = 2$
Dane Zbiory skończone A_1, A_2.
Szukane $|A_1 \cup A_2|$.

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Przypadek $n = 3$
Dane Zbiory skończone A_1, A_2, A_3.
Szukane $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Przypadek ogólny: n jest dowolną liczbą naturalną większą niż 1

Dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots n$ przez $N(i)$ oznaczmy sumę liczności wszystkich iloczynów (części wspólnyuch) i zbiorów wybranych spośród $A_1, A_2, \ldots A_n$, to znaczy:

$$N(i) = \sum_{1 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_i \leq n} |A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots \cap A_{p_i}|$$

Przykładowo, dla $n = 3$:

$$N(1) = |A_1| + |A_2| + |A_3|,$$
$$N(2) = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|,$$
$$N(3) = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Zasada włączania wyłączania dla n zbiorów
Niech $A_1, A_2, \ldots A_n$ będą skończonymi podzbiorami. Wtedy

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} N(i)$$

Uwaga 1. *Jeśli dla dowolnych i zbiorów $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_i}$, gdzie $1 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_i \leq n$, w $|A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots \cap A_{p_i}|$ jest stałe przy ustalonym i (tzn. w każdym iloczynie i zbiorów jest tyle samo elementów, przy ustalonym i), to*

$$N(i) = \binom{n}{i} \cdot |A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots \cap A_{p_i}|$$

Uwaga 2. *Przyjmując $N(0) = |U|$ =liczba wszystkich elementów uniwersum otrzymujemy następujący wzór na liczność dopełnienia sumy zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$:*

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_n}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_n| = N(0) - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} N(i) = N(0) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} N(i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} N(i)$$

Nieporządki.

Permutację $f : [n] \to [n]$ nazywamy *nieporządkiem* jeśli dla każdego $i \in [n]$ $f(i) \neq i$.

Mniej formalnie: Nieporządkiem nazywamy bijekcję przekształcającą zbiór $[n]$ na zbiór $[n]$ (permutację zbioru $[n]$) bez punktów stałych czyli taką, w której każdemu elementowi zbioru $[n]$ przyporządkowany jest element różny od niego.

Niech:
S_n - zbiór wszystkich permutacji zbioru $[n]$, D_n - zbiór wszystkich nieporządków zbioru $[n]$.

Liczbę wszystkich nieporządków zbioru $[n]$ oznaczmy przez d_n (tzn. $d_n = |D_n|$).

Problem
Ile jest nieporządków zbioru $[n]$? (krótko: $d_n =$?)

Twierdzenie Liczba nieporządków zbioru $[n]$ wynosi

$$d_n = |D_n| = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana permutacja zbioru $[n]$ jest nieporządkiem:

$$\frac{|D_n|}{|S_n|} = \frac{n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}}{n!} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|D_n|}{|S_n|} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{1}{i!} = e^{-1}$$