MATEMATYKA DYSKRETNA - wykład 7

dr inż. Krzysztof Bryś

Rekurencja.

Indukcja matematyczna

Ogólna zasada indukcji matematycznej:
Jeżeli
1) (baza indukcji) *twierdzenie* $T(n_0)$ *jest prawdziwe dla pewnego* $n_0 \in N$ *oraz*
2) (krok indukcyjny) *dla dowolnego* $n > n_0, n \in N$, *z prawdziwości twierdzenia* $T(k)$ *dla każdego* $n_0 \leq k < n$ *wynika prawdziwość twierdzenia* $T(n)$,
to
twierdzenie $T(n)$ *jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej* $n \geq n_0$

Szczególny przypadek:
Zasada indukcji matematycznej z krokiem jeden:
Jeżeli
1) twierdzenie $T(n_0)$ *jest prawdziwe dla pewnego* $n_0 \in N$ *oraz*
2) dla dowolnego $n > n_0, n \in N$, *z prawdziwości twierdzenia* $T(n-1)$ (Założenie) *wynika prawdziwość twierdzenia* $T(n)$ (Teza) ,
to
twierdzenie $T(n)$ *jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej* $n \geq n_0$

Co to jest rekurencja?

Nieformalnie: *Rekurencja* to sprowadzenie rozwiązania problemu do rozwiązania tego samego problemu ale dla mniejsych danych.

Równanie rekurencyjne jest to równanie $f(n) = 0$, w którym funkcja $f(n)$ dla dowolnej liczby naturalnej $n > n_0$ jest wyrażona przez $f(k)$ dla $n_0 \leq k < n$ wraz z warunkiem brzegowym $f(n)$. W takiej sytuacji możemy powiedzieć, że funkcja f jest zdefiniowana rekurencyjnie.

Ciąg dany równaniem rekurencyjnym to ciąg, którego n-ty wyraz zależy od poprzednich wyrazów tego ciągu przy czym dana jest pewna (skoczona) liczba pierwszych wyrazów tego ciągu, tzn.

$$a_n = h(n, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-1}) \text{ oraz } a_0, a_1, a_{k-1} \text{ są dane.}$$

k jest *głębokością rekurencji.*

Wzorem jawnym na n-ty wyraz ciągu a_n nazywamy wzr na a_n zależny jedynie od n.

Tworzenie zaleności rekurencyjnej.

1. "Odgadnięcie" i udowodnienie zaleności rekurencyjnej.
2. Wyznaczenie (sprawdzenie) dla początkowych wartości (liczb naturalnych) (tym samym wyznaczenie warunków brzegowych)

Rozwiązywanie rekurencji

A) Metoda "naiwna"
1) Odgadnięcie rozwiązania równania (czyli zgadnięcie wzoru jawnego).
2) Udowodnienie jego prawdziwości np. za pomocą indukcji matematycznej.
albo
B) Metoda "uniwersalna" (funkcji tworzących)
Obliczenie wzoru jawnego metodą funkcji tworzących.

Ciąg Fibonacciego

W 1202 roku Leonardo Fibonacci z Pizy sformułował następujący problem dotyczący hodowli pewnych szczególnych królików zwanych obecnie królikami Fibonacciego:

Na początku mamy jedną parę nowonarodzonych królików. Króliki mają następujące własności:
- każda para królików co miesiąc (ale począwszy od drugiego miesiąca po urodzeniu) "produkuje" (rodzi) jedną parę królików
- króliki są nieśmiertelne.

Pytanie: Ile królików będzie po n miesiącach?

Ciąg F_n nazywany jest *ciągiem Fibonacciego*, a dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$ liczba F_n nazywana jest *n-tą liczbą Fibonacciego*. Ciąg Fibonacciego dany jest następującym równaniem rekurencyjnym:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ dla } n \geq 2 \text{ oraz } F_0 = F_1 = 1.$$

Kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots).$$

Problem: Obliczyć wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego.