MATEMATYKA DYSKRETNA - wykład 8

dr inż. Krzysztof Bryś

Funkcje tworzące. Rozwiązywanie równań rekurencyjnych.

Szeregi potęgowe.

Skończoną sumę kolejnych potęg zmiennej x pomnożonych przez pewne współczynniki liczbowe nazywamy *wielomianem.*

Jeżeli suma kolejnych potęg x pomnożonych przez wyrazy pewnego ciągu liczbowego jest nieskończona, to znaczy jest postaci:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

to sumę taką nazywamy *szeregiem potęgowym* (o środku w punkcie $x = 0$). W ogólności szereg potęgowy (o środku w punkcie $x = 0$) możemy zapisać w postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

gdzie (a_n) jest nieskończonym ciągiem liczbowym.

Wiadomo, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ jest zbieżny dla $x \in (-R, R)$, gdzie R jest *promieniem zbieżności*, do pewnej funkcji $A(x)$ zmiennej x. Mówimy wtedy, że szereg potęgowy ma *sumę* $A(x)$ i zapisujemy w postaci:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

W takim przypadku mówimy też, że funkcja $A(x)$ ma rozwinięcie w szereg potęgowy postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Promień zbieżności szeregu potęgowego możemy znaleźć obliczając granicę $g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ albo granicę $g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i biorąc jako R odwrotność tej granicy. Czyli $R = \frac{1}{g}$ przy czym jeśli $|g| = \infty$, to $R = 0$ a jesli $g = 0$, to $R = \infty$.

Mając dany nieskończony ciąg liczbowy postaci $a_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ możemy utworzyć (wstawiając wyrazy ciągu jako współczynniki przy kolejnych potęgach x) szereg liczbowy postaci:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Dla $x \in (-R; R)$ utworzony w ten sposób szereg jest zbieżny do sumy $A(x)$ co zapisujemy następująco

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = A(x).$$

Zatem mając dany nieskończony ciąg liczbowy możemy zapisac go w postaci funkcji zmiennej x (o ile tylko promień zbiezności utworzonego szeregu potęgowego jest większy od zera).

Natomiast mając daną funkcję analityczną (to znaczy funkcję, która posiada pochodne dowolnego rzędu) $A(x)$ możemy zapisać ją jako sumę szeregu potęgowego za pomocą wzoru MacLaurina:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Czyli

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

gdzie

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}.$$

Zatem mając daną funkcję analityczną zmiennej x możemy odtworzyć ciąg a_n jako ciąg przy kolejnych potęgach x w rozwinięciu tej funkcji w szreg potęgowy. .

Sumą n pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie q i pierwszym wyrazie a_1 nazywamy liczbę

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Sumą nieskończonego ciągu liczbowego nazywamy liczbę

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = \frac{a_1}{1-q} \text{ dla } |q| < 1.$$

Działania na szeregach potęgowych

Niech $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ będą formalnymi szeregami potęgowymi (to znaczy niekoniecznie zbieznymi).

Wtedy:

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

Dla dowolnej liczby rzeczywistej a mamy:

$$a \cdot A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot a_n) x^n.$$

Mnożenie szeregów definiuje się następująco

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n, \text{ gdzie} c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Aby otrzymać współczynnik c_n przy x^n w szeregu, który jest wynikiem mnożenia dwóch szeregów należy wybrać na wszystkie możliwe sposoby pary współczynników przy takich potęgach x, które w sumie dają n, pomnożyć wybrane pary i wyniki dodać do siebie.

Funkcje tworzące.

Niech $a_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ będzie nieskończonym ciągiem liczbowym. Jeżeli szereg potęgowy

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest zbiezny w pewnym otoczeniu punktu $x = 0$ (tzn promień zbieżności $R > 0$) i ma sumę $A(x)$ (co zapisujemy $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,), to funkcję $A(x)$ nazywamy *funkcją tworzącą dla ciągu* (a_n).

Metoda rozwiązywania równań rekurencyjnych za pomocą funkcji tworzących

1) Dla danego równania rekurencyjnego dla ciągu g_n postaci

$$g_n = h(g_{n-1}, \ldots, g_{n-k}) \text{ oraz } g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}\text{dane}$$

tworzymy równanie, w którym niewiadomą jest funkcja tworząca $G(x)$ dla ciągu g_n:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + \ldots + g_{k-1} x^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} h(g_{n-1}, \ldots, g_{n-k}) x^n = H(G(x)).$$

Z otrzymanego równania postaci

$$G(x) = H(G(x), x)$$

wyznaczamy $G(x)$ jako funkcję zmiennej x.
2) Rozwijamy funkcję $G(x)$ w szereg potęgowy. Współczynnik przy x^n w tym rozwinięciu jest postacią jawną (tzn. zależną tylko od n) n-tego wyrazu ciągu g_n a więc poszukiwanym rozwiązaniem danego równania rekurencyjnego.

Uywając tej metody można wyznaczy wzór jawny na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1},)$$

gdzie stała

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

zwana jest *liczbą złotego podziału.*

Złoty podział odcinka to taki podział na odcinki o długości a, b, że

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Twierdzenie 1 *Jeśli* $a_n = A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2}$*, gdzie* A*,* B *są danymi stałymi oraz* a_0*,* a_1 *są dane, to*

$$a_n = c \cdot \alpha^n + d \cdot \beta^n$$

gdzie
α*,* β *są pierwiastkami równania charakterystycznego postaci* $x^2 = Ax + B$ *oraz*
c*,* d *wyznaczamy z układu równań postaci*

$$\begin{cases} c + d = a_0 \\ c\alpha + d\beta = a_1 \end{cases}$$

Twierdzenie 2 *Jeżeli ciąg* a_n *dany jest równaniem rekurenycjnym postaci:*

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} A_i \cdot a_{n-i} = A_1 \cdot a_{n-1} + \ldots + A_k \cdot a_{n-k},$$

gdzie $A_1, \ldots, A_k$ *są danymi stałymi oraz* $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ *są dane, to*

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot (r_i)^n,$$

gdzie
r_i*, dla* $i = 1, 2, \ldots, k$*, są pierwiastkami równania charakterystycznego postaci*

$$r^k = A_1 \cdot r^{k-1} + A_2 \cdot r^{k-2} + A_{k-1} \cdot r + A_k$$

a stałe c_i *wyznaczamy z warunków brzegowych (danych pierwszych* k *wyrazów ciągu) wstawiając do postaci rozwiązania kolejno* $n = 0, 1, \ldots, k-1$*.*

Twierdzenie 3 *Jeśli* $a_n = A \cdot a_{n-1} + B$*, gdzie* A, B *są dane oraz* a_0, a_1 *są dane, to*

$$a_n = c \cdot A^n + d,$$

gdzie

$$\begin{cases} c + d = a_0 \\ A \cdot c + d = a_1 \end{cases}$$