MATEMATYKA DYSKRETNA - wykład 9

dr inż. Krzysztof Bryś

Podzielność liczb naturalnych.

Dla dwóch dowolnych liczb naturalnych a, b mówimy, że a *dzieli* (*jest dzielnikiem*) b jeśli istnieje liczba naturalna k taka, że $k \cdot a = b$. Mówimy wtedy równiez, że b jest wielokrotnością a lub też, że b *jest podzielne przez* a. Zapisujemy $a|b$.

Największym wspólnym podzielnikiem liczb naturalnych a,b (w skrócie $NWD(a, b)$) nazywamy największą liczbę naturalną c taką, że $c|a$ oraz $c|b$.
Przykładowo $NWD(12, 30) = 6$

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb naturalnych a,b (w skrócie $NWW(a, b)$) nazywamy najmniejszą liczbę naturalną c taką, że $a|c$ oraz $b|c$.
Przykładowo $NWW(6, 8) = 24$.

Relacja modulo: Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c:

$$\mathbf{a} \bmod \mathbf{b} = c \text{ jeśli } c < b \text{ oraz istnieje liczba naturalna } k \text{ taka, że } k \cdot b + c = a.$$

Mówimy, że a *modulo* b równa się c. Innymi słowy a mod b (a modulo b) jest resztą z dzielenia a przez b.
Przykładowo 5 mod 2 = 1, 11 mod 4 = 3.

Mówimy, że liczba p jest liczbą *pierwszą* jeśli jest podzielna tylko przez 1 i przez siebie. Liczby pierwsze to : $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37....$

Mówimy, że liczby naturalne a i b są *względnie pierwsze* jeśli ich największy wspólny podzielnik wynosi 1 (tzn. $NWD(a, b) = 1$)

Własności relacji podzielności:
1. Jeśli liczby naturalne a i b są względnie pierwsze (tzn. $NWD(a, b) = 1$), to $NWW(a, b) = a \cdot b$.
2. Jeśli $d|a$ oraz $d|b$, to $d|NWD(a, b)$ (Każda liczba, która jest dzielnikiem a oraz jest dzielnikiem b jest też dzielnikiem największego wspólnego dzielnik a oraz b).
3. Jeśli $a|d$ oraz $b|d$, to $NWW(a, b)|d$ (Każda liczba podzielna przez a i przez b jest też podzielna przez najmniejszą wspólną wielokrotnośc liczb a oraz b).

Zatem, przykładowo, wszystkie liczby podzielne przez 2 i przez 3, to liczby podzielne przez 6 (bo 2 i 3 są względnie pierwsze, $NWD(2, 3) = 1$, więc $NWW(2, 3) = 2 \cdot 3 = 6$). A wszystkie liczby podzielne przez 6 i przez 8, to wszystkie liczby podzielne przez $NWW(6, 8) = 24$.

Algorytm Euklidesa do wyznaczania $NWD(a, b)$

Dane: liczby naturalne a, b.
Szukane: $NWD(a, b)$.

EUCLID(a,b)
1. IF b=0 THEN RETURN(a).
2. ELSE RETURN(EUCLID(b, a mod b).

Przykład. Obliczmy za pomocą algorytmu Euklidesa $NWD(21, 30)$.
Mamy $a = 21$, $b = 30$.
Zatem EUCLID$(21, 30)$ = EUCLID$(30, 21)$ = EUCLID$(21, 30 \bmod 21)$= EUCLID $(21, 9)$ = EUCLID$(9, 21 \bmod 9)$ = EUCLID$(9, 3)$ = EUCLID$(3, 9 \bmod 3)$ = EUCLID$(3, 0)$=3.

Wyznaczanie $NWW(a, b)$

Aby wyznaczyć $NWW(a, b)$ należy liczby naturalne a i b rozłożyć na czynniki pierwsze (zapisać w postaci iloczynu liczb pierwszych). Następnie z rozkładu liczby b należy wykreślic te czynniki, które występują również w rozkładzie liczby a. Mnożąc pozostałe czynniki liczby b przez a otrzymujemy $NWW(a, b)$.

Przykład. Obliczymy $NWW(8, 12)$.
Zapisujemy liczby 8 i 12 w postaci iloczynu liczb pierwszych znajdując za każdym razem dzielnik będący liczbą pierwszą różną od 1, dzieląc przez ten dzielnik i rozważając w kolejnym kroku otrzymaną w ten sposób liczbę. Mamy

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

oraz

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Z rozkładu na czynniki pierwsze liczby 12 wykreślamy dwie dwójki (bo dwie dwójki występują również w rozkładzie liczby 8. Pozostałe czynniki mnożymy przez siebie i otrzymujemy

$$NWW(8, 12) = 2 \cdot \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$