MATEMATYKA DYSKRTENA - wykład 2
dr inż Krzysztof Bryś

Zliczanie podstawowych obiektów kombinatorycznych

Podstawowe zagdnienia kombinatoryczne:
1) Czy istnieje obiekt o zadanych własnościach?
2)Ile jest obiektów o zadanych własnościach?
3) Czy (i jeśli tak to jak) można znaleźć obiekt optymalny o zadanych własnościach?

Podstawowe obiekty kombinatoryczne

Zbiorem z powtórzeniami nazywamy zbiór, w którym pewne elementy się powtarzają (występują elementy nierozróżnialne między sobą).

W dalszym toku tego wykładu pod pojęciem zbioru będziemy rozumieć "zwykły" zbiór bez powtórzeń a gdy bedziemy używać zbiorów z powtórzeniami będzie to wyraźnie powiedziane.

$$[n] := \{1, 2, 3, \dots n\}$$

Jeżeli w rozważaniach zapomina się o tym jakimi obiektami są elementy danego zbioru n-elementowego to zbiór ten można zastąpić w tych rozważaniach zbiorem $[n]$.

Permutacja zbioru $[n]$ (n-elementowego zbioru X) - dowolny ciąg n-elementowy złożony z wszystkich elementów zbioru $[n]$

Permutacja zbioru $[n]$ *z powtórzeniami* - dowolny ciąg n-elementowy złożony z elementów zbioru $[k]$ przy czym $k < n$ oraz element i (element i-tego rodzaju) występuje w tym ciągu n_i razy dla $i = 1, \dots k$ oraz

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

.

Kombinacja k*-elementowa ze zbioru* $[n]$ - dowolny k-elementowy podzbiór zbioru $[n]$.

Kombinacja k*-elementowa z powtórzeniami ze zbioru* $[n]$ - dowolny k-elementowy podzbiór z powtórzeniami zbioru $[n]$.

Wariacja k*-elementowa ze zbioru* $[n]$ - dowolny k-elementowy ciąg róznowartościowy złożony z elementów zbioru $[n]$.

Wariacja k*-elementowa z powtórzeniami ze zbioru* $[n]$ - dowolny k-elementowy ciąg złożony z elementów zbioru $[n]$.

Zliczanie podstawowych obiektów kombinatorycznych

Prawo dodawania: Jeżeli $A_1, A_2, \dots A_n$ są skończonymi, parami rozłącznymi (tzn $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $i, j = 1, \dots n$) podzbiorami zbioru A oraz $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n$, to $|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$.

Prawo mnożenia: Jeżeli $A_1, A_2, \dots A_n$ są skończonymi zbiorami oraz $A = \{(a_1, a_2, \dots a_n) : a_i \in A_i \text{dla} i = 1, \dots n\}$, to $|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$.

Wzory na liczby podstawowych obiektów kombinatorycznych.

Liczba wszystkich:	bez powtórzeń	z powtórzeniami
permutacji zbioru $[n]$	$P_n = n!$	$\overline{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$
k elementowych kombinacji ze zbioru $[n]$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$
k-elementowych wariacji zbioru $[n]$	$V_n^k = \binom{n}{k}\cdot k! = \frac{n!}{n-k)!}$	$\overline{V}_n^k = n^k$

Fakt 1. Wszystkich podzbiorów zbioru $[n]$ jest 2^n.
Fakt 2. Wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ jest

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Wzór Newtona

Wzór Newtona (wzór dwumianowy Newtona): Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$

Schematy wyboru

Liczba wszystkich wyborów k elementów spośród n, gdy:	powtórzenia niedozwolone	powtórzenia dozwolone
kolejność nieistotna	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$
kolejność istotna	$V_n^k = \binom{n}{k}\cdot k! = \frac{n!}{n-k)!}$	$\overline{V}_n^k = n^k$

Schematy podziału

Zagadnienie podziału (rozmieszczenia): Na ile sposobów można podzielić zbiór n-elementowy na k rozłącznych części (rozmieścić n obiektów w k szufladach)?

Przypadek 1: części rozróżnialne, obiekty rozróżnialne
Podział różnych obiektów na różne części można zrealizować poprzez wylosowanie n części (spośród k), do których trafią poszczególne obiekty. Ponieważ obiekty są rozróżnialne, to kolejność jest istotna. Losowanie odbywa się ze zwracaniem bo każda część może zostać wylosowana wielokrotnie. Może być jej przyporządkowanych wiele obiektów. Zatem liczba możliwości jest równa liczbie n-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru $[k]$ czyli k^n

Przypadek 2: części rozróżnialne, obiekty nierozróżnialne
Podział jednakowych obiektów na różne części można zrealizować poprzez wylosowanie n części (spośród k), do których trafią poszczególne obiekty. Jedyna różnica w porównaniu z poprzednim przypadkiem polega na tym, że ponieważ obiekty są nierozróżnialne, to kolejność wylosowywania nie jest istotna. Tak jak poprzednio losowanie odbywa się ze zwracaniem bo każda część może zostać wylosowana wielokrotnie. Zatem liczba możliwości jest równa liczbie n-elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru $[k]$ czyli $\binom{k+n-1}{n}$