MATEMATYKA DYSKRTENA - wyklad 3

dr inż Krzysztof Bryś

Podziały zbioru

Przypadek 3: części nierozróżnialne, obiekty rozróżnialne

Podziałem zbioru $[n]$ na k bloków nazywamy rodzinę zbiorów (zwanych *blokami* podziału) $\{B_1, B_2, \ldots B_k\}$ taką, że:
1) $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = [n]$, (suma bloków pokrywa cały zbiór $[n]$)
2) $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ (bloki są parami rozłączne)
3) $B_i \neq \emptyset$ dla każdego $i = 1, \ldots, k$ (bloki są niepuste).

Dla dowolnych liczb naturalnych k, n, *liczbą Stirlinga drugiego rodzaju* $S(n, k)$ nazywamy liczbę wszystkich podziałów zbioru $[n]$ na k bloków o ile $k > 0$. Dodatkowo dodefiniowuje się
$S(n,0) = \{ \begin{array}{ll} 0 & \text{dla } n > 0 \\ 1 & \text{dla } n = 0 \end{array}$

Szczególne przypadki: $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ oraz $S(n, k) = 0$ gdy $k > n$ (bo nie da się rozdzielić mniej niżk obiektów na k niepustych części)

Twierdzenie Dla dowolnych liczb naturalnych $0 < k \leq n$ zachodzi następujący wzór:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

Ile jest wszystkich podziałów zbioru złożonego z n róznych obiektów na k jednakowych części niekoniecznie niepustych?

W każdym takim podziale będzie i niepustych części , gdzie $i \in \{1, 2, \ldots k\}$. Zatem liczba takich podziałów wynosi:

$$\sum_{i=1}^{k} S(n, i)$$