MATEMATYKA DYSKRTENA - wykład 4

dr inż Krzysztof Bryś

Podziały liczb

Przypadek 4: części nierozróżnialne, obiekty nierozróżnialne

Każdy podział n jednakowych obiektów na k jednkaowych części odpowiada podziałowi n jedynek na k części a więc podziałowi liczby n na k składników przy czym kolejność składników nie jest istotna Aby nie zliczać tych samych podziałów wielokrotnie przyjmiemy umowę, że składniki w podziale są uporządkowane od największego do najmniejszego.

Zagadnienie równoważne zagadnieniu podziału w tym przypadku:
Na ile sposobów można podzielić liczbę n na k składników?

Podziałem liczby n na k składników nazywamy ciąg $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ taki, że :
1) $b_1, b_2, \ldots, b_k$ są liczbami naturalnymi różnymi od zera,
2) $b_1 + b_2 + \ldots + b_k = n$,
3) $b_1 \geq b_2 \geq \ldots b_k$.

Dla dowolnych liczb naturalnych k, n, przez $P(n, k)$ oznaczamy liczbę wszystkich podziałów liczby n na k składników o ile $k > 0$. Dodatkowo dodefiniowuje się: $P(n,0) = \{ \begin{array}{ll} 0 & \text{dla } n > 0 \\ 1 & \text{dla } n = 0 \end{array}$

Szczególne przypadki: $P(n, 1) = P(n, n) = 1$ oraz $P(n, k) = 0$ gdy $k > n$ (bo nie da się rozdzielić mniej niżk obiektów na k niepustych części).

Twierdzenie Dla dowolnych liczb naturalnych $0 < k < n$ zachodzi następujący wzór:

$$P(n,k) = \sum_{i=1}^{k} P(n-k, i)$$

Ile jest wszystkich podziałów n jednakowych obiektów na k jednakowych części niekoniecznie niepustych?

W każdym takim podziale będzie i niepustych części , gdzie $i \in \{1, 2, \ldots k\}$.= Zatem liczba takich podziałów wynosi:

$$\sum_{i=1}^{k} P(n,i)$$

Schematy podziału - ciąg dalszy

Liczba wszystkich podziałów n obiektów na k części (rozmieszczeń n obiektów w k szufladach) gdy:

	obiekty rozróżnialne	obiekty nierozróżnialne
części rozróżnialne	k^n	$\binom{k+n-1}{n}$
części nierozróżnialne	$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$	$\sum_{i=1}^{k} P(n,i)$