MDM2 Tożsamości

2.1. Udowodnić następujące tożsamości (nadając obu stronom równości odpowiednie interpretacje kombinatoryczne)

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$,

d) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \ n \neq 0$

e) $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$,

f) $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$,

g) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$,

h) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$,

i) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i = n2^{n-1}$,

j) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$,

k) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = \binom{n}{k}2^k$,

*l)** $m^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(m-1)^{n-k}$.

*m)** $\sum_{r=0}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$,

*n)** $\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$,

2.2. Pokazać, że

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \ldots > \binom{n}{n} .$$

2.3.* Udowodnić następujące tożsamości

a) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{j} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } n \neq j \\ (-1)^n & \text{jeśli } n = j \end{cases}$,

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

c) $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i}\binom{n+i}{l} = (-1)^k \binom{n}{l-k}$,

Wskazówki do zadania 2.3:

a) 1 g) oraz 1 d);

b) indukcja po n, 1 c), 1 h), 1 d);

c) indukcja po n, 3 a);