MDM 4 Funkcje tworzące

6.1 Na ile sposobów można wybrać 11 jabłek z koszyka, w którym są 4 antonówki, 3 malinówki i 6 papierówek?

6.2 Pokazać, że

$$\binom{4m}{1} - \binom{4m}{3} + \binom{4m}{5} - \ldots - \binom{4m}{4m-1} = 0,$$

$$\binom{4m}{0} - \binom{4m}{2} + \binom{4m}{4} - \ldots + \binom{4m}{4m} = (-4)^m.$$

6.3 Znaleźć funkcje tworzące następujących ciągów:

a) $a(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \ldots, N, \\ 0, & n > N \end{cases},$

b) $a(n) = \begin{cases} n+1, & n = 0, 1, \ldots N, \\ 0, & n \geqslant N+1 \end{cases},$

c) $a(n) = \begin{cases} (n+1)(n+2), & n = 0, 1, \ldots N, \\ 0, & n \geqslant N+1 \end{cases},$

d) $a(n) = \alpha^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

e) $a(n) = \alpha n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

f) $a(n) = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

g) $a(n) = n^k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

h) $a(n) = n\alpha^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

i) $a(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{\alpha^n}{n}, & n > 0 \end{cases},$

j) $a(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{\alpha^n}{n!}, & n > 0 \end{cases},$

6.4 Znaleźć funkcję tworzącą $F(x)$ ciągu A_n wiedząc, że funkcją tworzącą ciągu a_n jest $f(x)$ oraz:

a) $A_n = a_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$

b) $A_n = a_{n+k}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $k \in \mathbb{N}^+$

c) $A_n = a_{n+1} - a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$

d) $A_n = n \cdot a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$

e) $A_n = \begin{cases} a_{n-1}, & n = 1, \ldots, \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

6.5 W sklepie są dwie pary skarpetek białych, trzy niebieskich, cztery zielonych i jedna czarna. Na ile sposobów można kupić $1, 2, \ldots, 10$ par skarpetek?

6.6 Na ile sposobów można kupić 50 litrów soku jeśli są dostępne opakowania 1-litrowe, 2-litrowe oraz 4-litrowe.

6.7 Korzystając z metod funkcji tworzących podaj wzór na n-ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie:

a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ $(n \geqslant 0)$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$,

b) $a_n = 6n + a_{n-1}$, $a_0 = 0$,

c) $a_n = a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$.

6.8 Na ile sposobów można szachownicę wymiaru $n \times 2$ pokryć kostkami domina (wymiaru 2×1 - nie muszą do siebie pasować). A na ile sposobów szachownicę $n \times 3$?

6.9 Jasio zbiega ze schodów, które mają n stopni. W każdym kroku Jasio może zejść na następny stopień lub skoczyć dwa stopnie niżej (omijając jeden stopień). Na ile sposobów Jasio może zbiec ze schodów?

6.10 Na ile sposobów można umieścić lwy w n klatkach, tak że w każdej klatce jest co najwyżej jeden lew i żadne dwie sąsiednie klatki nie są zajęte. Zakładamy że lwów mamy nieograniczoną ilość i przynajmniej jeden lew jest w klatce.

6.11 Udowodnić:

a) $F_{m+n} = F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}$,

b) $\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n-1}$,

c) $\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1}$.

6.12 Ile jest uporządkowanych trójek (A_1, A_2, A_3) takich, że $A_1, A_2, A_3 \subset [n]$ i $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [n]$?