

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

Spis pojęć teoretycznych

1. Podstawowe pojęcia: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, zdarzenie losowe, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zbiór zdarzeń losowych, zdarzenie przeciwne, zdarzenia wykluczające się itp. .
2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.
3. Własności funkcji prawdopodobieństwa.
4. Przestrzeń probabilistyczna.
5. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa - zdarzenia elementarne jednakowo prawdopodobne.
6. Prawdopodobieństwo warunkowe.
7. Niezależność dwóch zdarzeń.
8. Zupełny układ zdarzeń. Twierdzenie o prawdopodobieństwie zupełnym. Twierdzenie Bayesa.
9. Zmienna losowa jednowymiarowa - definicja.
10. Dystrybuanta zmiennej losowej jednowymiarowej - definicja, własności.
11. Zmienna losowa jednowymiarowa typu skokowego - definicja, rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej typu skokowego, dystrybuanta zmiennej losowej typu skokowego.
12. Zmienna losowa jednowymiarowa typu ciągłego - definicja. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej jednowymiarowej - definicja i własności. Własności funkcji prawdopodobieństwa zmiennej losowej typu ciągłego.
13. Wartość oczekiwana - definicja i własności.
14. Wariancja - definicja i własności.
15. Odchylenie standardowe - definicja, kiedy jest równe zero.
16. Kwantyl - definicja, własności. Mediana, kwartyle.
17. Moda.
18. Niezależność zmiennych losowych.
19. Rozkład jednopunktowy, n -punktowy, dwupunktowy.
20. Rozkład dwumianowy (Bernoulliego). Interpretacja (schemat Bernoulliego). Wskaźnik struktury.
21. Rozkład Poissona. Przybliżanie rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona.
22. Rozkład jednostajny.
23. Rozkład normalny (Gaussa). Krzywa Gaussa. Standardowy rozkład normalny. Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego. Standaryzacja zmiennej losowej o rozkładzie normalnym. Reguła trzech sigm.
24. Rozkład t-Studenta, rozkład chi-kwadrat.
25. Przybliżanie rozkładu dwumianowego rozkładem normalnym.
26. Statystyka - czym się zajmuje. Podstawowe pojęcia: populacja generalna, próba, próba losowa, dystrybuanta empiryczna itp. .
27. Sposoby zbierania danych statystycznych (szeregi statystyczne).
28. Parametry empiryczne - średnia z próby, wariancja z próby.

29. Estymacja punktowa.
30. Przedziały ufności - definicja, rodzaje i własności. Poziom ufności. Przedziały ufności dla wartości oczekiwanej, wariancji i wskaźnika struktury - wybór modelu. Metoda wyznaczania przedziału ufności.
31. Wyznaczanie minimalnej liczności próby.
32. Weryfikacja hipotez statystycznych. Podstawowe pojęcia: test statystyczny, test parametryczny, test istotności, test zgodności, hipoteza zerowa, hipoteza alternatywna, zbiór krytyczny, błąd 1-go rodzaju, błąd 2-go rodzaju.
33. Weryfikacja hipotez statystycznych przy użyciu testów istotności. Poziom istotności. Weryfikacja hipotez przy pomocy krytycznego poziomu istotności.
34. Weryfikacja hipotez dotyczących wartości oczekiwanej, wariancji i wskaźnika struktury - wybór modelu.
35. Weryfikacja hipotez statystycznych przy pomocy testu zgodności chi-kwadrat.

Uwagi:

- Podane pojęcia obejmują cały materiał, którego znajomość jest wymagana ale nie wyszczególniają wszystkiego szczegółowo co należy umieć. Przykładowo przy rozkładach prawdopodobieństwa należy znać definicję zmiennej losowej o danym rozkładzie prawdopodobieństwa, jej wartość oczekiwaną i wariancję.
- Zestaw pytań na egzaminie składać się będzie z 4 zadań: trzech zadań ćwiczeniowych (jednego z rachunku prawdopodobieństwa i dwóch ze statystyki) i jednego zadania teoretycznego będącego zestawem 15 zdań, których wartość logiczną należy ocenić.

Zasady zaliczenia przedmiotu

- Do liczby punktów uzyskanych podczas ćwiczeń (max. 40 punktów) doliczana jest liczba punktów uzyskanych w czasie egzaminu (max. 60 punktów). Uzyskana suma punktów stanowi podstawę do wyznaczenia oceny z przedmiotu RAPIŚ według następującego algorytmu:
 51 – 60 punktów - 3.0
 61 – 70 punktów - 3.5
 71 – 80 punktów - 4.0
 81 – 90 punktów - 4.5
 91 – $+\infty$ punktów - 5.0.
- Warunkami koniecznymi dla uzyskania pozytywnej oceny z przedmiotu RAPIŚ są: zaliczenie ćwiczeń (tzn. uzyskanie z ćwiczeń co najmniej 21 punktów) oraz zdanie egzaminu (tzn. uzyskanie z egzaminu co najmniej +30 punktów, w tym co najmniej +10 punktów za zadanie 4 testowe).
- Do egzaminu można przystąpić bez zaliczonych ćwiczeń.
- Zdany egzamin można poprawiać w kolejnych terminach aż do końca danego roku akademickiego bez ryzyka utraty uzyskanego wcześniej wyniku. Przy wystawianiu oceny z przedmiotu brany jest pod uwagę najlepszy wynik na egzaminie z całego bieżącego roku akademickiego.
- W przypadku uzyskania na egzaminie w sumie co najmniej 30 punktów, w kolejnych terminach egzaminu można pisać tylko teorię (tzn. zadanie 4 testowe).

Przykładowy zestaw zadań egzaminacyjnych:

zad.1) (10 pkt) Zmienna losowa X ma rozkłado prawdopodobieństwa postaci: $P(X = -2) = 0.5$, $P(X = 0) = 0.1$, $P(X = 1) = 0.4$.
Oblicz a) dystrybuantę zmiennej losowej X , b) wariancję X , c) kwantylę rzędu 0.4 zmiennej losowej X , d) medianę X , e) modę.

zad.2) (10 pkt) W pewnym eksperymencie chemicznym badano czas zakończenia pewnej reakcji. Dokonano $n = 100$ niezależnych doświadczeń i otrzymano z nich średnią $\bar{x} = 46$ sek. oraz odchylenie standardowe $s = 13$ sek. Na poziomie ufności 0.98 znajdź przedział ufności dla średniego czasu potrzebnego na zakończenie tej reakcji.

zad.3) (10 pkt) Przy kontroli pracy dwu central telefonicznych w pewnym losowo wybranym dniu stwierdzono, że na 200 połączeń w centrali A 16 było pomyłkowych. Natomiast na 100 połączeń w centrali B pomyłkowych było 10. Czy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ można twierdzić, że procent pomyłkowych połączeń jest większy w centrali B.

zad.4) (za każdą prawidłową odpowiedź: + 2 pkt, za każdą złą odpowiedź: -2 pkt, za brak odpowiedzi: 0 pkt) Czy poniższe zdanie jest prawdziwe:

- Zbiór zdarzeń losowych dla rzutu monetą składa się z dwóch elementów.
- Jeżeli $P(A) = P(A|B)$, to zdarzenia A i B są niezależne.
- Dwa wyniki tego samego doświadczenia są zawsze zdarzeniami niezależnymi.
- Zmienna losowa nie może przyjmować wartości ujemnych.
- Dystrybuanta dowolnej zmiennej losowej jest funkcją ciągłą.
- Funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest funkcją o wartościach nieujemnych.
- Wariancja zmiennej losowej jest równa zero wtedy i tylko wtedy gdy zmienna ta jest stałą.
- Wartość oczekiwana nie może być liczbą ujemną.
- Jeżeli zmienne losowe X i Y są niezależne, to $D^2(X - Y) = D^2(X) - D^2(Y)$.
- Wariancja zmiennej losowej o rozkładzie jednopunktowym wynosi zero.
- Wartość oczekiwana zmiennej losowej o rozkładzie Bernoulliego $B(100, 0.1)$ wynosi 10.
- Błąd pierwszego rodzaju polega na odrzuceniu prawdziwej hipotezy H_0 .
- Zbiór wartości przyjmowanych przez zmienną losową typu skokowego może być nieskończony.
- Przy ustalonym poziomie ufności można zbudować tylko jeden przedział ufności dla wartości oczekiwanej badanej cechy X .
- Poziom istotności jest to prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy H_0 .

Zaliczenie egzaminu następuje przy otrzymaniu co najmniej +30 punktów, w tym co najmniej +10 punktów za zadanie teoretyczne.

Odpowiedzi do Przykładowego Zestawu Zadań Egzaminacyjnych:

- 1) b) 2.04, c) -2, d) $< -2; 0 >$, e) -2. 2) (42.98; 49.02). 3) NIE 4) a)NIE, b) TAK, c) NIE, d)NIE, e) NIE, f) TAK, g) TAK, h) NIE, i) NIE, j) TAK, k) TAK, l) TAK, m) TAK, n) NIE, o) NIE.

Przykładowe zadania

A) RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

1. Zorganizowano następującą grę. Rzucamy dwiema kostkami. Jeśli suma oczek jest równa 2 - otrzymujemy 5 zł, jeżeli 3 - 3 zł, a w każdym innym przypadku płacimy 1 zł. Niech X oznacza wygraną. Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa i dystrybuantę zmiennej losowej X .
2. Zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1 = \frac{2}{7}$, $p_2 = \frac{4}{7}$, $p_3 = c$. Znaleźć stałą c oraz dystrybuantę zmiennej losowej X .
3. Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X : $P(X = 0) = 0.4$, $P(X = -1) = 0.3$, $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = c$. Znaleźć a) stałą c , b) dystrybuantę zmiennej losowej X ,
4. Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X : $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = -1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.3$. Znaleźć a) dystrybuantę zmiennej losowej X , b) $P(-1 < X \leq 2)$.
5. Zmienna losowa X ma funkcję prawdopodobieństwa postaci: $P(X = -1) = 0.2$, $P(X = 0) = 0.3$, $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.1$. Znaleźć a) dystrybuantę, b) wartość oczekiwaną, c) wariancję, d) modę, e) medianę, f) kwantyl rzędu 0.4 zmiennej losowej X .
6. Zmienna losowa X ma funkcję prawdopodobieństwa postaci: $P(X = -2) = 0.3$, $P(X = -1) = 0.2$, $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = 0.4$. Znaleźć a) wartość oczekiwaną, b) wariancję, c) modę, d) medianę e) kwantyl rzędu 0.7 zmiennej losowej X .
7. Gęstość zmiennej losowej X ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dla } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Znaleźć a) wartość oczekiwaną b) wariancję c) $P(-1 < X \leq 1)$.

8. Prawdopodobieństwo, że w jednym z niezależnych jednakowych testów nowego modelu samochodu ulegnie on awarii wynosi 0.1. Jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia awarii w dokładnie 4 testach spośród 10 wykonanych ?
9. Zmienna losowa X ma rozkład $N(2, 5)$. a) Jaki rozkład ma zmienna losowa $Y = -X + 1$? b) Oblicz $P(0 < X < 3)$
10. Zmienna losowa X ma rozkład $B(100, 0.1)$. Ile wynosi a) wartość oczekiwana, b) wariancja tej zmiennej losowej? c) Oblicz $P(X = 2)$.
11. Spośród całej populacji Mikołajów wylosowano 10-elementową próbkę i zmierzono długość ich brody. Otrzymano następujące wyniki (w cm.) 5,6,6,6,7,8,8,8,8,8. Znaleźć rozkład liczości w próbie. Obliczyć średnią z próby, wariancję z próby, jeśli badaną cechą jest długość brody Mikołaja.

B) STATYSTYKA

1. W celu oszacowania dokładności pewnego przyrządu pomiarowego dokonano $n = 16$ pomiarów tej samej wielkości i otrzymano wariancję z próby $s^2 = 20$. Przy współczynniku ufności $1 - \alpha = 0.98$ znaleźć przedział ufności dla nieznannej wariancji pomiaru tym przyrządem.
2. Wiadomo, że pomiary pewnym przyrządem mają rozkład $N(m, 40)$. Ile pomiarów trzeba wykonać aby przy współczynniku ufności $1 - \alpha = 0.96$ maksymalny błąd oszacowania wartości oczekiwanej tych pomiarów wyniósł 20?
3. Dokonano $n = 10$ pomiarów czasu potrzebnego na wykonanie pewnego podzespołu. Otrzymano średnią z próby $\bar{x} = 31s$ oraz wariancję z próby $s^2 = 0.5$ Przy współczynniku ufności $1 - \alpha = 0.9$ znaleźć przedział ufności dla średniego czasu potrzebnego na wykonanie tego podzespołu. Wiadomo, że czas potrzebny na wykonanie ma rozkład normalny.
4. W celu zbadania wariancji urządzenia pomiarowego wykonano 400 pomiarów tym urządzeniem. Otrzymano wariancję z próby $s^2 = 12$ Przy współczynniku ufności $1 - \alpha = 0.98$, znaleźć przedział ufności dla wariancji pomiarów tym urządzeniem. Wiadomo, że wyniki pomiarów mają rozkład normalny.
5. Wśród $n_1 = 100$ zbadanych kobiet 17 potrafiło rozwiązać to zadanie. Natomiast wśród $n_2 = 120$ zbadanych mężczyzn 25 potrafiło rozwiązać to zadanie. Czy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ można twierdzić, że w badanej populacji mężczyźni częściej potrafią rozwiązać to zadanie niż kobiety.
6. Spośród 120 studentów pewnej uczelni losowo wybranych do badania podczas egzaminu 70 ściaęało. Czy na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ można twierdzić, że studenci tej uczelni spełniają "polską" normę mówiącą, że podczas egzaminu co najmniej 50% ogółu studentów ściaęa?
7. Wykonano 12 pomiarów woltomierzem pewnego napięcia prądu i otrzymano wariancję z tej próby $s^2 = 0.9$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ sprawdzić hipotezę, że wariancja pomiarów tym woltomierzem jest mniejsza niż 1.0
8. Wykonano badanie stanu zawartości alkoholu we krwi u studentów dwóch uczelni. Otrzymano średnią zawartość alkoholu $\bar{x}_1 = 1.5$ i wariancję z próby $s_1^2 = 1$ dla $n_1 = 10$ studentów uczelni oraz dla $n_2 = 12$ studentów uczelni B. średnią zawartość alkoholu we krwi $\bar{x}_2 = 2.4$ i wariancję z próby $s_2^2 = 1.2$ Wiadomo, że poziom alkoholu we krwi ma w badanych populacjach rozkład normalny. Czy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ można twierdzić, że studenci uczelni B posiadają przeciętnie większą zawartość alkoholu we krwi niż studenci uczelni A.

Odpowiedzi do przykładowych zadań z rachunku prawdopodobieństwa:

- A) 1) $P(X = -1) = \frac{33}{36}$, $P(X = 3) = \frac{2}{36}$, $P(X = 5) = \frac{1}{36}$. 2) $c = \frac{1}{7}$. 3) $c = 0.2$. 4) b) 0.5. 5) b) 0.8, c) 1.86, d) 0.2, e) $< 0, 1 >$, f) 0. 6) a) 0.1, b) 3.09, c) 2, d) $< -1, 1 >$, e) 2. 7) a) $\frac{3}{2}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{1}{3}$. 8) $\binom{10}{4}(0.1)^4(0.9)^6$. 9) a) $N(-1, 5)$, b) $\phi(0.8) - \phi(0.2)$. 10) a) 10, b) 9, c) $\binom{100}{2}(0.1)^2(0.9)^{98}$. 11) $\bar{x} = 7$, $s^2 = 1.2$.

Wskazówki do przykładowych zadań ze statystyki :

- B) 1) Model 4, 2) min. liczność próby dla m , 3) Model 2, 4) Model 5, 5) test dla dwch wskaźników struktury, 6) test dla wskaźnika struktury, 7) Model 4, 8) test dla dwóch wartości oczekiwanych.

PRZYJEMNEJ NAUKI !!!