STATYSTYKA
dr inż Krzysztof Bryś

Wykład 1

Klasyczny Rachunek Prawdopodobieństwa

1. Pojęcia wstępne.

Doświadczeniem losowym nazywamy doświadczenie, którego wynik nie jest znany. Posiadamy jedynie informacje o zbiorze możliwych wyników tego doświadczenia. Wynik doświadczenia losowego wykluczający inne możliwe wyniki nazywamy *zdarzeniem elementarnym.*

UWAGA: Zakłada się, że w wyniku doświadczenia losowego zachodzi dokładnie jedno zdarzenie elementarne.

Zbiór wszystkich zdarzeń losowych nazywamy *przestrzenią zdarzeń elementarnych* i oznaczamy przez Ω.

Zdarzeniem losowym nazywamy dowolny wynik doświadczenia losowego. Każde zdarzenie losowe jest zbiorem zdarzeń elementarnych

UWAGA: Jeżeli Ω jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym, to *zdarzeniem losowym* jest dowolny podzbiór zbioru Ω

Zdarzenie $\emptyset$ nazywamy zdarzeniem *niemożliwym.*
Zdarzenie Ω nazywamy zdarzeniem *pewnym.*
Zdarzenie $\overline{A} = \Omega \setminus A$ nazywamy zdarzeniem *przeciwnym* do A.
Jeżeli dla dwóch zdarzeń A i B zachodzi $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zdarzenia te *wykluczają się* (są rozłączne).

Przykłady. Zdarzenie $A = $ *miesiąc kwiecień ma 31 dni* jest zdarzeniem niemożliwym. Zdarzenie $B = $ *miesiąc kwiecień ma 30 dni* jest zdarzeniem pewnym. Zdarzeniem przeciwnym do $C = $ *dzisiaj jest niedziela* jest zdarzenie $\overline{C} = $ *dzisiaj jest inny dzień tygodnia niż niedziela.*

Rozważmy teraz przykład bardzo prostego doświadczenia losowego.

Przykład. Rozważmy doświadczenie losowe polegające na jednokrotnym rzucie monetą. Przestrzeń zdarzeń elementarnych składa sie z dwóch elementów, zdarzenia ω_O polegajacego na wypadnięciu orła i ω_O, które oznacza wypadnięcie reszki. Wypiszmy wszystkie możliwe podzbiory zbioru Ω (zdarzenia losowe):
$A_1 = \Omega = \{\omega_O, \omega_R\}$, $A_2 = \{\omega_O\}$, $A_3 = \{\omega_R\}$, $A_4 = \emptyset$.
Zdarzenie A_1 polega na wypadnięciu orła lub reszki. Jest to zdarzenie pewne. Zdarzenie A_4 polegające na niewypadnięciu ani orła ani reszki nie może zajść w wyniku naszego doświadczenia losowego. Jest to zdarzenie niemożliwe. Zdarzeniem przeciwnym do A_2 - wypadł orzeł jest zdarzenie A_3 - wypadła reszka. Zwróćmy uwagę na to, że $A_2 \cup A_3 = \Omega$ (w wyniku rzutu monetą wypadnie orzeł lub reszka) oraz $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ (nie może wypaść jednocześnie orzeł i reszka).

2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.

Niech Ω będzie zbiorem skończonym, to znaczy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_N\}$. Dla dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ takiego, że $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, gdzie $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots N\}$, definiuje się funkcję prawdopodobieństwa w następujący sposób:

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \ldots + P(\{\omega_{i_k}\}).$$

W przypadku, gdy zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to znaczy $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_N) = \frac{1}{N}$, otrzymujemy następujący wzór:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{N} = \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A}}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych}}.$$

Powyższa definicja prawdopodobieństwa nie jest poprawna w ogólności, gdyż zbiór Ω nie musi być skończony a zdarzenia elementarne nie muszą być jednakowo prawdopodobne.

3. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathcal{Z} \subseteq 2^{\Omega} = \mathcal{P}(\Omega)$ zbiorem zdarzeń losowych. *Funkcją prawdopodobieństwa* nazywamy funkcję:

$$P : \mathcal{Z} \to [0, 1]$$

spełniającą następujące trzy aksjomaty:

- $P1)$ $P(A) \geq 0$ dla każdego $A \in \mathcal{Z}$,
- $P2)$ $P(\Omega) = 1$
- $P3)$ jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jest ciągiem zdarzeń rozłącznych (to znaczy $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$), to $P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$.

Wartość funkcji P na zbiorze A nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A

4. Własności funkcji prawdopodobieństwa.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leq P(B)$.
3. Dla dowolnego $A \subseteq \Omega$ $P(A) \leq 1$.
4. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
5. Dla dowolnego $A \subseteq \Omega$ $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
7. Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

5. Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność.

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Doświadczenia niezależne = dowolny wynik jednego z nich nie wpywa na wynik drugiego.
Zdarzenia niezależne = zdarzenia A, B, dla których:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

albo

$$P(A|B) = P(A) \text{ lub } P(B|A) = P(B)$$

Informacja o zajściu jednego z nich nie zmienia szans wystąpienia drugiego.