

STATYSTYKA
dr inż Krzysztof Bryś

Wykład 5

Podstawowe teoretyczne rozkłady prawdopodobieństwa zmiennej losowej jednowymiarowej

Typu skokowego

1. Rozkład jednopunktowy.

Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = c) = 1$ dla pewnej stałej c

Wartość oczekiwana: $E(X) = c$

Wariancja: $D^2(X) = 0$

Interpretacja: Rozkład dowolnej stałej liczbowej X .

2. Rozkład dwupunktowy (zerojedynkowy).

Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = 1) = p, P(X = 0) = q = 1 - p$

Wartość oczekiwana: $E(X) = p$

Wariancja: $D^2(X) = p \cdot q = p \cdot (1 - p)$

Interpretacja: Rozkład dowolnej zmiennej X , która odpowiada na pewne pytanie albo TAK ($X = 1$ - "sukces") albo NIE ($X = 0$ - "porażka"), rozkład dowolnej cechy "zero-jedynkowej" (obiekt albo ją posiada ($X = 1$) albo nie posiada ($X = 0$)).

3. Rozkład Bernoulliego (dwumianowy) - $B(n, p)$

Schemat doświadczeń Bernoulliego:

- n niezależnych doświadczeń,

- w każdym doświadczeniu albo sukces z prawdopodobieństwem p albo porażka (z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$);

Interpretacja: Zmienna losowa X ma rozkład $B(n, p)$ jeśli mówi o liczbie sukcesów w schemacie n niezależnych doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p w każdym z nich. Jest sumą n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie zerojedynkowym.

Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, n, q = 1 - p$.

Wartość oczekiwana: $E(X) = np$

Wariancja: $D^2(X) = n \cdot p \cdot q$

4. Rozkład Poissona - $\mathcal{P}o(\lambda)$

Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Wartość oczekiwana: $E(X) = \lambda$

Wariancja: $D^2(X) = \lambda$

Interpretacja: Rozkład graniczny dla rozkładu $B(n, p)$ przy $n \rightarrow +\infty$.

Dla dostatecznie dużych n , zmienna losowa o rozkładzie $B(n, p)$ ma w przybliżeniu rozkład Poissona z parametrem $\lambda = n \cdot p$.

Typu ciągłego

1. Rozkład jednostajny na przedziale $(a; b)$ - $U(a, b)$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \text{ dla } a < x < b \\ 0 & , \text{ dla pozostałych } x \end{cases}$$

Wartość oczekiwana: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Wariancja: $D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Interpretacja Zmienna losowa X ma rozkład $U(a, b)$ jeśli przyjęcie przez tą zmienną dowolnej wartości z przedziału $(a; b)$ jest jednakowo prawdopodobne.

2. Rozkład normalny (Gaussa) - $N(m, \sigma)$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ dla $x \in R$

Wartość oczekiwana: $E(X) = m$

Wariancja: $D^2(X) = \sigma^2$

Wykresem powyższej funkcji gęstości prawdopodobieństwa jest **krzywa Gaussa**

Zmienna losowa standaryzowana dla zmiennej losowej o rozkładzie $N(m, \sigma)$:

$$\bar{X} = \frac{X - m}{\sigma}$$

ma rozkład normalny standardowy $N(0, 1)$.

Dystrybuanta rozkładu normalnego standardowego $N(0, 1)$:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ dla } x \in R$$

Z parzystości funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu $N(0, 1)$ wynika, że:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

u_α - kwantyl rzędu α zmiennej losowej o rozkładzie $N(0, 1)$ (tzn. $\Phi(u_\alpha) = \alpha$)

3. Rozkład chi kwadrat o n stopniach swobody

Zmienna losowa $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$, gdzie X_1, X_2, \dots, X_n zmienne o rozkładzie $N(0, 1)$ ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody

Wartość oczekiwana: $E(\chi^2) = n$

Wariancja: $D^2(\chi^2) = 2n$

Dla dużych n ($n > 40$) rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody można przybliżać rozkładem $N(n, \sqrt{2n})$.

$\chi^2(\alpha, n)$ = kwantyl rzędu $1 - \alpha$ zmiennej o rozkładzie chi-kwadrat o n stopniach swobody

4. Rozkład t-Studenta o n stopniach swobody.

Zmienna losowa $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n}}}$, gdzie X zmienna losowa o rozkładzie $N(0, 1)$ a zmienna χ^2 ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody.

Wartość oczekiwana: $E(T) = 0$.

Wariancja: $D^2(T) = \frac{n}{n-2}$.

Dla dużych n ($n > 40$) rozkład t-Studenta o n stopniach swobody można przybliżać rozkładem $N(0, 1)$.

$t(\alpha, n)$ = kwantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ zmiennej o rozkładzie t-Studenta o n stopniach swobody.