

MATEMATYKA 3 dla ZE III
ZADANIA
CZĘŚĆ 2
INDUKCJA i REKURENCJA

1. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n :
 - (a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 - (b) $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$,
 - (c) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
 - (d) liczba $n^2 + n$ jest podzielna przez 2,
 - (e) liczba $10^n - 4$ jest podzielna przez 6,
2. Znajdź wzór jawny na n -ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie w następujący sposób:
 - a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ dla $n \geq 0$ oraz $a_0 = 1$, $a_1 = 2$,
 - b) $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geq 2$ oraz $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
 - c) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geq 2$ oraz $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.
3. Oprocentowanie wkładów w banku wynosi 10% w skali rocznej. Co się bardziej opłaca: przez n lat wpłacać po 100 euro na koniec każdego roku czy raz na początku wpłacić 1000 euro?
4. Wiadomo, że co roku pewien pracownik otrzymuje podwyżkę pensji, która wynosi 20% kwoty pensji wypłacanej przez ostatni rok pomniejszone o 11% kwoty pensji wypłacanej rok wcześniej. Na początku pracownik zarabia 1 tys. euro. Ile będzie zarabiał po n latach?
5. "Parowa" pożyczyl od chłopaków z miasta 1 mln euro na 50% rocznie (odsetki są doliczane na koniec każdego roku). Na koniec każdego roku spłaca 0.2 mln. euro. Ile będzie wynosił jego dług po n latach? (znajdź wzór jawny)
6. Pewien ochroniarz pobrał za ochronę restauracji za pierwszym razem 10 euro. Za każdym następnym razem pobierał haracz stanowiący sumę podwojonego haraczu pobranego ostatnim razem i dodatkowych 5 euro. Znajdź wzór jawny na h_n - haracz (w euro) pobrany za n -tym razem.
7. Pewien handlowiec sprzedawał jedną jednostkę towaru z pierwszej dostarczonej mu partii przez głównego handlowca po 10 euro a a drugiej partii po 11 euro. Przy każdej następnej dostawie cena jednostki towaru była ustalana jako różnica pomiędzy siedmiokrotną ceną jednostki z poprzedniej dostawy i sześciokrotną ceną jednostki towaru z przedostatniej dostawy. Znajdź wzór jawny na j_n -cenę jednostki towaru (w euro) z n -tej partii (dostawy).
8. W pewnym państwie cena bananów w momencie wstąpienia do UE wynosiła 1 euro a w miesiąc po wstąpieniu wynosiła 2 euro. W każdym następnym miesiącu cena bananów była ustalana jako różnica pomiędzy potrojoną ceną bananów z poprzedniego miesiąca i podwojoną ceną bananów sprzed dwóch miesięcy. Znajdź wzór jawny na b_n -cenę bananów (w euro) w n miesięcy po wstąpieniu do UE.

ODPOWIEDZI

2) a) $a_n = \frac{1}{4}[(-1)^n + 3^{n+1}]$, b) $a_n = \frac{1}{3}[(-1)^{n+1} + 2^n]$, c) $a_n = -\frac{1}{3}(-2)^n + \frac{4}{3}$. 3) Bardziej opłaca się wpłacić 1000 na początku. 4) $a_n = (0.1)^{n+1} + 0.9 \cdot (1.1)^n$. 5) $d_n = (1.5)^n - 0.4((1.5)^n - 1)$. 6) $h_n = 7.5 \cdot 2^n - 5$. 7) $j_n = 9.8 + 0.2 \cdot 6^n$. 8) $b_n = 2^n$.