

CZEŚĆ 4. FUNKCJE TWORZĄCE. RÓWNANIA REKURENCYJNE

- Znaleźć funkcje tworzące następujących ciągów:
 - $a_n = 2^n, n = 0, 1, 2, \dots$, b) $a_n = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N, \\ 0, & n > N \end{cases}$, c) $a_n = \begin{cases} n + 1, & n = 0, 1, \dots, N, \\ 0, & n > N \end{cases}$,
 d) $a_n = 3n, n = 0, 1, \dots$, e) $a_n = n^2, n = 0, 1, \dots$, f) $a_n = n5^n, n = 0, 1, \dots$, g) $a_n = \frac{4^n}{n!}, n = 0, 1, \dots$
- Znaleźć funkcje tworzącą $F(x)$ dla ciągu $(A(n))$ znając funkcje tworzącą $f(x)$ dla ciągu $(a(n))$:
 - $A_n = a_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$, b) $A_n = a_{n+1} - a_n, n = 0, 1, 2, \dots$, c) $A_n = n \cdot a_n, n = 0, 1, 2, \dots$,
 d) $A_n = \begin{cases} a_{n-1}, & n = 1, 2, \dots, \\ 0, & n = 0 \end{cases}$
- Za pomocą funkcji tworzących znajdź wzór jawny na n -ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie w następujący sposób:
 - $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ dla $n \geq 0$ oraz $a_0 = 1, a_1 = 2$,
 - $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geq 2$ oraz $a_0 = 1, a_1 = 2$.
 - $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geq 2$ oraz $a_0 = 0, a_1 = 1$.
 - $a_n = 6n + a_{n-1}$, dla $n \geq 1$ oraz $a_0 = 0$,
 - $a_n = a_{n-1} + 2n - 2$ dla $n \geq 1$ oraz $a_0 = 1$.
 - $a_n = 2a_{n-1} + 3n$ dla $n \geq 1$ oraz $a_0 = 1$.
- Oprocentowanie wkładów w banku wynosi 10% w skali rocznej. Co się bardziej opłaca: przez n lat wpłacać po 100 euro na koniec każdego roku czy raz na początku wpłacić 1000 euro?
- Wiadomo, że co roku pewien pracownik otrzymuje podwyżkę pensji, która wynosi 20% kwoty pensji wypłacanej przez ostatni rok pomniejszone o 11% kwoty pensji wypłacanej rok wcześniej. Na początku pracownik zarabia 1 tys. euro. Ile będzie zarabiał po n latach?
- "Parowa" pożyczył od chłopaków z miasta 1 mln euro na 50% rocznie (odsetki są doliczane na koniec każdego roku). Na koniec każdego roku spłaca 0.2 mln. euro. Ile będzie wynosił jego dług po n latach?
- Pewien ochroniarz pobrał za ochronę restauracji za pierwszym razem 10 euro. Za każdym następnym razem pobierał haracz stanowiący sumę podwojonego haraczu pobranego ostatnim razem i dodatkowych 5 euro. Znajdź wzór jawny na h_n - haracz (w euro) pobrany za n -tym razem.
- Pewien handlowiec sprzedawał jedną jednostkę towaru z pierwszej dostarczonej mu partii przez głównego handlowca po 10 euro a a drugiej partii po 11 euro. Przy każdej następnej dostawie cena jednostki towaru była ustalana jako różnica pomiędzy siedmiokrotną ceną jednostki z poprzedniej dostawy i sześciokrotną ceną jednostki towaru z przedostatniej dostawy. Znajdź wzór jawny na j_n -cenę jednostki towaru (w euro) z n -tej partii (dostawy).
- W pewnym państwie cena bananów w momencie wstąpienia do UE wynosiła 1 euro a w miesiąc po wstąpieniu wynosiła 2 euro. W każdym następnym miesiącu cena bananów była ustalana jako różnica pomiędzy potrojona ceną bananów z poprzedniego miesiąca i podwojona ceną bananów sprzed dwóch miesięcy. Znajdź wzór jawny na b_n -cenę bananów (w euro) w n miesięcy po wstąpieniu do UE.
- Znajdź współczynnik przy x^{12} w
 - $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)^7$, b) $x^2(1 - x)^{12}$.
- W sklepie są 2 samochody białe, 3 niebieskie, 4 zielone i 1 czarna. Na ile sposobów można kupić 5 samochodów? Zakładamy, że samochody jednego koloru są jednakowe.
- Na ile sposobów można wybrać 11 jabłek z koszyka, w którym są 4 antonówki, 3 malinówki i 6 papierówek? Zakładamy, że jabłka jednego rodzaju są nierozróżnialne.
- Jasio zbiega ze schodów, które mają n stopni. W każdym momencie Jasio może przeskoczyć na następny stopień lub ominąć jeden stopień. Na ile sposobów Jasio może zbiec ze schodów?

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ Z CZEŚCI 3:

- 1) 47, 2) a) 462 b) 520, c) 768, 3) 3, 4) 174, 5) 14, 6) 11, 7) 2, 8) 1, 9) a) 5!, b) $d_5 = 44$, 10) $d_6 = 265$, 11) ≈ 0.37 .