STYSTYSTYKA dla ZOM II
dr inż Krzysztof Bryś

Wykad 1

Klasyczny Rachunek Prawdopodobieństwa.

1. Pojęcia wstępne.

Doświadczeniem losowym nazywamy doświadczenie, którego wynik nie jest znany. Posiadamy jedynie informacje o zbiorze możliwych wyników tego doświadczenia. Wynik doświadczenia losowego wykluczający inne możliwe wyniki nazywamy *zdarzeniem elementarnym.*
UWAGA: Zakłada się, że w wyniku doświadczenia losowego zachodzi dokładnie jedno zdarzenie elementarne.
Zbiór wszystkich zdarzeń losowych nazywamy *przestrzenią zdarzeń elementarnych* i oznaczamy przez Ω.
Zdarzeniem losowym nazywamy dowolny wynik doświadczenia losowego. Każde zdarzenie losowe jest zbiorem zdarzeń elementarnych
UWAGA: Jeżeli Ω jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym, to *zdarzeniem losowym* jest dowolny podzbiór zbioru Ω
Zdarzenie $\emptyset$ nazywamy zdarzeniem *niemożliwym.*
Zdarzenie Ω nazywamy zdarzeniem *pewnym.*
Zdarzenie $\overline{A} = \Omega \setminus A$ nazywamy zdarzeniem *przeciwnym* do A.
Jeżeli dla dwóch zdarzeń A i B zachodzi $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zdarzenia te *wykluczają się* (są rozłączne).

Przykłady. Zdarzenie $A =$ *miesiąc kwiecień ma 31 dni* jest zdarzeniem niemożliwym. Zdarzenie $B =$ *miesiąc kwiecień ma 30 dni* jest zdarzeniem pewnym. Zdarzeniem przeciwnym do $C =$ *dzisiaj jest niedziela* jest zdarzenie $\overline{C} =$ *dzisiaj jest inny dzień tygodnia niż niedziela.*

Przykład. Rozważmy doświadczenie losowe polegające na jednokrotnym rzucie monetą. Przestrzeń zdarzeń elementarnych składa sie z dwóch elementów, zdarzenia ω_O polegajacego na wypadnięciu orła i ω_O, które oznacza wypadnięcie reszki. Wypiszmy wszystkie możliwe podzbiory zbioru Ω (zdarzenia losowe):
$A_1 = \Omega = \{\omega_O, \omega_R\}$, $A_2 = \{\omega_O\}$, $A_3 = \{\omega_R\}$, $A_4 = \emptyset$.
Zdarzenie A_1 polega na wypadnięciu orła lub reszki. Jest to zdarzenie pewne. Zdarzenie A_4 polegające na niewypadnięciu ani orła ani reszki nie może zajść w wyniku naszego doświadczenia losowego. Jest to zdarzenie niemożliwe. Zdarzeniem przeciwnym do A_2 - wypadł orzeł jest zdarzenie A_3 - wypadła reszka. Zwróćmy uwagę na to, że $A_2 \cup A_3 = \Omega$ (w wyniku rzutu monetą wypadnie orzeł lub reszka) oraz $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ (nie może wypaść jednocześnie orzeł i reszka).

2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.

Niech Ω będzie zbiorem skończonym, to znaczy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_N\}$. Dla dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ takiego, że $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, gdzie $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots N\}$, definiuje się funkcję prawdopodobieństwa w następujący sposób:

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \ldots + P(\{\omega_{i_k}\}).$$

W przypadku, gdy zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to znaczy $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_N) = \frac{1}{N}$, otrzymujemy następujący wzór:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{N} = \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A}}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych}}.$$

Powyższa definicja prawdopodobieństwa nie jest poprawna w ogólności, gdyż zbiór Ω nie musi być skończony a zdarzenia elementarne nie muszą być jednakowo prawdopodobne.

3. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathcal{Z}$ zbiorem zdarzeń losowych.
Funkcją prawdopodobieństwa nazywamy funkcję $P : \mathcal{Z} \to [0,1]$ spełniającą następujące trzy aksjomaty:

$P1)$ $P(A) \geq 0$ dla każdego $A \in \mathcal{Z}$,
$P2)$ $P(\Omega) = 1$
$P3)$ jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ jest ciągiem zdarzeń rozłącznych (to znaczy $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$), to $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$

Wartość funkcji P na zbiorze A nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A

4. Własności funkcji prawdopodobieństwa.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leq P(B)$.
3. Dla dowolnego $A \subseteq \Omega$ $P(A) \leq 1$.
4. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
5. Dla dowolnego $A \subseteq \Omega$ $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
7. Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

5. Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność.

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Doświadczenia niezależne = dowolny wynik jednego z nich nie wpywa na wynik drugiego.
Zdarzenia niezależne = zdarzenia A, B, dla których:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

albo

$$P(A|B) = P(A) \text{ lub } P(B|A) = P(B)$$

Informacja o zajściu jednego z nich nie zmienia szans wystąpienia drugiego.

5. Zupełny układ zdarzeń. Wzór Bayesa

Zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ tworzą *zupełny układ zdarzeń* jeśli:

1. $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$,
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla każdego $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie zupełnym
Jeśli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ tworzą zupełny układ zdarzeń, to dla każdego zdarzenia B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

Wzór Bayesa
Jeśli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ tworzą zupełny układ zdarzeń, to dla każdego zdarzenia B takiego, że $P(B) > 0$ oraz dowolnego $j = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi wzór :

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(A_1 \cap B) + \ldots + P(A_j \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)} =$$

$$= \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \ldots P(A_j) \cdot P(B|A_j) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

Zmienna losowa jednowymiarowa

Intuicyjnie: zmienna, która przyjmuje pewną wartość liczbową w wyniku doświadczenia losowego.
Formalnie: Funkcja $X : \Omega \to R$ przyporządkowująca każdemu zdarzeniu losowemu pewną wartość liczbową
Dystrybuanta zmiennej losowej X - funkcja $F_X : R \to R$ zdefiniowana następująco:

$$F(x) = P(X < x) \text{ dla każdego } x \in R$$

Zmienna losowa typu skokowego

Zmienna X, dla której zbiór wartości przyjmowanych przez tą zmienną jest skończony lub przeliczalny, tzn $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ albo $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, ldots\}$

Rozkład prawdopodobieństwa: funkcja P, która każdemu **punktowi skokowemu** $x_i \in W_X$ przyporządkowuje **skok prawdopodobieństwa** $p_i = P(X = x_i)$ w taki sposób, że:

$$1) \text{ dla każdego } i: \quad p_i > 0 \text{ oraz}$$

$$2) \sum_i p_i = 1$$

.

Zmienna losowa typu ciągłego

Zmienna X, dla której zbiór wartości przyjmowanych przez tą zmienną jest przedziałem liczbowym lub sumą przedziałów.

Rozkład prawdopodobieństwa: funkcja f zwana **gęstością prawdopodobieństwa** taka, że

$$1) \text{ dla każdego } x \in R: \quad f(x) \geq 0 \text{ oraz}$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

.

Podstawowe parametry zmiennej losowej

1. **Wartość oczekiwana** zmiennej losowej X = liczba E(X) będąca średnia ważoną rozkładu prawdopodobieństwa przy założeniu, że wagą jest prawdopodobieństwo (dla zmiennej losowej typu skokowego) albo środkiem ciężkości rozkładu prawdopodobieństwa przy założeniu, że gęstością jest funkcja gęstości prawdopodobieństwa (dla zmiennej losowej typu ciągłego).

2. **Wariancja** zmiennej losowej X= $D^2(X)$ = wartość oczekiwana kwadratu odchylenia zmiennej od jej wartości oczekiwanej - miara średniego odchylenia kwadratowego.

3. **Odchylenie standardowe** zmiennej losowej $X = D(X)$= pierwiastek z wariancji - miara średniego odchylenia zmiennej od jej wartości oczekiwanej.

4. **Kwantyl rzędu** $p = x_p$ = punkt, w którym skumulowane prawdopodobieństwo (dystrybuanta) osiąga (przekracza) wartość p.
mediana=Me=kwantyl rzędu $\frac{1}{2}$
kwartyl dolny=Q_1=kwantyl rzędu $\frac{1}{4}$
kwartyl dolny=Q_3=kwantyl rzedu $\frac{3}{4}$
i-ty decyl= przedział między kwantylem rzędu $(i-1)\cdot 0.1$ a kwantylem rzędu $i \cdot 0.1$
i-ty percentyl= przedział między kwantylem rzędu $(i-1)\cdot 0.01$ a kwantylem rzędu $i\cdot 0.01$

5. **Moda (dominanta; wartość modalna)** = punkt, w którym funkcja prawdopodobieństwa osiąga największą wartość.

Podstawowe teoretyczne rozkłady prawdopodobieństwa zmiennej losowej jednowymiarowej

Typu skokowego

1. Rozkład jednopunktowy.

Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = c) = 1$ dla pewnej stałej c
Wartość oczekiwana: $E(X) = c$
Wariancja: $D^2(X) = 0$
Interpretacja: Rozkład dowolnej stałej liczbowej X.

2. Rozkład dwupunktowy (zerojedynkowy).

Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = q = 1 - p$
Wartość oczekiwana: $E(X) = p$
Wariancja: $D^2(X) = p \cdot q = p \cdot (1 - p)$
Interpretacja: Rozkład dowolnej zmiennej X, która odpowiada na pewne pytanie albo TAK ($X = 1$-"sukces") albo NIE ($X = 0$-"porażka"), rozkład dowolnej cechy "zero-jedynkowej" (obiekt albo ją posiada ($X = 1$) albo nie posiada ($X = 0$).

3. Rozkład Bernoulliego (dwumianowy) - $B(n, p)$

Schemat doświadczeń Bernoulliego:
- n niezależnych doświadczeń,
- w każdym doświadczeniu albo sukces z prawdopodobieństwem p albo porażka (z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$);

Interpretacja: Zmienna losowa X ma rozkład $B(n, p)$ jeśli mówi o liczbie sukcesów w schemacie n niezależnych doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p w każdym z nich. Jest sumą n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie zerojedynkowym.
Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $q = 1 - p$.
Wartość oczekiwana: $E(X) = np$
Wariancja: $D^2(X) = n \cdot p \cdot q$

4. Rozkład Poissona - $\mathcal{P}o(\lambda)$

Funkcja prawdopodobieństwa : $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$
Wartość oczekiwana: $E(X) = \lambda$
Wariancja: $D^2(X) = \lambda$
Interpretacja: Rozkład graniczny dla rozkłaadu $B(n, p)$ przy $n \to +\infty$.
Dla dostatecznie dużych n, zmienna losowa o rozkładzie $B(n, p)$ ma w przybliżeniu rozkład Poissona z

parametrem $\lambda = n \cdot p$.

Typu ciągłego

1. Rozkład jednostajny na przedziale $(a;b)$ - $U(a,b)$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{, dla } a < x < b \\ 0 & \text{, dla pozostałych x} \end{cases}$$

Wartość oczekiwana: $E(X) = \frac{a+b}{2}$
Wariancja: $D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Interpretacja Zmienna losowa X ma rozkład $U(a,b)$ jeśli przyjęcie przez tą zmienną dowolnej wartości z przedziału $(a;b)$ jest jednakowo prawdopodobne.

2. Rozkład normalny (Gaussa) - $N(m,\sigma)$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ dla $x \in R$
Wartość oczekiwana: $E(X) = m$
Wariancja: $D^2(X) = \sigma^2$
Wykresem powyższej funkcji gęstości prawdopodobieństwa jest **krzywa Gaussa**
Zmienna losowa standaryzowa dla zmiennej losowej o rozkładzie $N(m,\sigma)$:

$$\overline{X} = \frac{X-m}{\sigma}$$

ma rozkład normalny standardowy $N(0,1)$.

Dystrybuanta rozkładu normalnego standardowego $N(0,1)$:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ dla } x \in R$$

Z parzystości funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu $N(0,1)$ wynika, że:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

u_α - kwantyl rzędu α zmiennej losowej o rozkładzie $N(0,1)$ (tzn. $\Phi(u_\alpha) = \alpha$)

3. Rozkład chi kwadrat o n stopniach swobody

Zmienna losowa $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$, gdzie $X_1, X_2, \ldots X_n$ zmienne o rozkładzie $N(0,1)$ ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody
Wartość oczekiwana: $E(\chi^2) = n$
Wariancja: $D^2(\chi^2) = 2n$
Dla dużych n ($n > 40$) rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody można przybliżać rozkładem $N(n, \sqrt{2n})$.

$\chi^2(\alpha, n)$ = kwantyl rzędu $1-\alpha$ zmiennej o rozkładzie chi-kwadrat o n stopniach swobody

4. Rozkład t-Studenta o n stopniach swobody.

Zmienna losowa $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n}}}$, gdzie X zmienna losowa o rozkładzie $N(0,1)$ a zmienna χ^2 ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody.

Wartość oczekiwana: $E(T) = 0$.
Wariancja: $D^2(T) = \frac{n}{n-2}$.

Dla dużych n ($n > 40$) rozkład t-Studenta o n stopniach swobody można przybliżać rozkładem $N(0,1)$.

$t(\alpha, n) =$ kwantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ zmiennej o rozkładzie t-Studenta o n stopniach swobody.