MATEMATYKA DYSKRETNA

dr inż. Krzysztof Bryś

Elementarne pojęcia teorii grafów.

Grafem (*grafem prostym, grafem niezorientowanym*) nazywamy parę (V, E) gdzie V jest pewnym zbiorem zwanym *zbiorem wierzchołków*, natomiast E jest zbiorem pewnych par nieuporządkowanych elementów ze zbioru V zwanym *zbiorem krawędzi.*

Grafem zorientowanym (*grafem skierowanym*) nazywamy parę (V, E) gdzie V jest pewnym zbiorem zwanym *zbiorem wierzchołków*, natomiast E jest zbiorem pewnych par uporządkowanych elementów ze zbioru V zwanym *zbiorem krawędzi.*

Jeżeli krawędziom grafu przypisane są liczby zwane *wagami*, to graf taki nazywamy *grafem ważonym.*

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Zbiór wierzchołków grafu G oznaczamy przez $V(G)$ a liczbę wierzchołków grafu G przez $|G|$. Zbiór krawędzi grafu G oznaczamy przez $E(G)$ a liczbę krawędzi grafu G przez $e(G)$.

Dwa grafy nazywamy *izomofricznymi* jeśli istnieje pomiędzy nimi *izomorfizm grafów* czyli bijekcja pomiędzy ich zbiorami wierzchołków, która zachowuje krawędzie.

Podgrafem grafu G nazywamy graf H taki, że $V(H) \subseteq V(G)$ oraz $E(H) \subseteq E(G)$.

Podgrafem indukowanym w grafie G przez zbiór wierzchołków $V' \subseteq V(G)$ nazywamy graf, którego zbiorem wierzchołków jest V' a zbiór krawędzi składa się z tych krawędzi grafu G, które mają oba końce w V'.

Podgrafem indukowanym w grafie G przez zbiór krawędzi $E' \subseteq E(G)$ nazywamy graf, którego zbiorem krawędzi jest E' a zbiór wierzchołków składa się z tych wierzchołków grafu G, które są końcami co najmniej jednej krawędzi z E'.

Podgrafem rozpinającym grafu G nazywamy dowolny podgraf H grafu G, dla którego $V(H) = V(G)$.

Stopniem wierzchołka v w grafie G nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z tego wierzchołka (krawędzi których jest końcem) i oznaczamy przez $deg_G(v)$

Minimalny stopień wierzchołka w grafie G:

$$\delta(G) = \min\{deg_G(v) : v \in V(G)\}$$

Maksymalny stopień wierzchołka w grafie G :

$$\Delta(G) = \min\{deg_G(v) : v \in V(G)\}$$

Grafem pełnym o n wierzchołkach nazywamy graf w którym jest n wierzchołków i każde dwa z nich są połączone krawędzią. Graf pełny o n wierzchołkach oznaczamy przez K_n.

Ścieżką w grafie G nazywamy ciąg wierzchołków $v_0, v_1, \ldots v_k$ taki, że każde dwa kolejne wierzchołki w tym ciągu są połączone krawędzią.

Ścieżką zamkniętą w grafie G nazywamy siceżkę $v_0, v_1, \ldots v_k$ taką, że $v_0 = v_k$.

Drogą w grafie G nazywamy ścieżkę, na której żaden wierzchołek nie pojawia się więcej niż raz. Drogę o n wierzchołkach oznaczamy przez P_n. Drogę o końcach w wierzchołkach u, v nazywamy *$u - v$ drogą*

Cyklem w grafie G nazywamy ścieżkę zamkniętą, na której żaden wierzchołek, za wyjątkiem początkowego i końcowego, nie pojawia się więcej niż raz. Cykl o n wierzchołkach oznaczamy przez C_n

Graf G nazywamy *spójnym* jeśli między każdą parą wierzchołków w tym grafie istnieje droga.

Składową spójności grafu G nazywamy maksymalny podgraf spójny grafu G, maksymalny w tym sensie, ze dodanie czegokolwiek z reszty grafu powoduje, ze otrzymany podgraf przestaje byc spójny. Każdy graf spójny ma dokładnie jedną składową spójności.

Niech $v \in V(G)$, $e \in E(G)$.
$G \setminus v$ = graf otrzymany z G przez usunięcie wierzchołka v.
$G \setminus e$ = graf otrzymany z G przez usunięcie krawędzi e.
Niech $V' \subseteq V(G)$.
$G \setminus V'$ = graf, który powstaje z G przez usunięcie wszystkich wierzchołków należących do V' oraz wszystkich krawędzi, które mają co najmniej jeden koniec w V'.
Niech $E' \subseteq E(G)$.
$G \setminus E'$ = graf, który powstaje z G przez usunięcie wszystkich krawędzi należących do E'

Lasem nazywamy dowolny graf, który nie zawiera cykli.

Drzewem nazywamy dowolny graf spójny, który nie zawiera cykli. Można zatem powiedzieć, że drzewo to spójny las.

Każdy wierzchołek o stopniu 1 w drzewie nazywamy *lisciem. Mostem* w grafie spójnym nazywamy dowolną krawędź, której usunięcie powoduje, że otrzymany graf jest niespójny.

Ścieżką Eulera w grafie G nazywamy ścieżkę, która przechodzi przez każdą krawędź grafu G dokłdnie raz.

Ścieżką zamkniętą Eulera albo *cyklem Eulera* w grafie G nazywamy ścieżkę zamkniętą, która przechodzi przez każdą krawędź grafu G dokłdnie raz.

Drogą Hamiltona w grafie G nazywamy drogę, która przechodzi przez każdy wierzchołek tego grafu.

Cyklem Hamiltona w grafie G nazywamy cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek tego grafu.

k-pokolorowaniem wierzchołków grafu G nazywamy dowolną funkcję, która każdemu wierzchołkowi grafu G przypisuje liczbę ze zbioru $\{1, 2, \dots k\}$.

k-pokolorowanie wierzchołków grafu nazywamy *dobrym* jeśli każde dwa wierzchołki połączone krawędzią mają rózne kolory.

Minimalną liczbę kolorów potrzebną do dobrego pokolorowania wierzchołków grafu G nazywamy *liczbą chromatyczną* grafu G i oznaczamy przez $\chi(G)$.

Graf G nazywamy *dwudzielnym* jeśli jego zbiór wierzchołków można podzielić na takie dwa podzbiory zwane *klasami dwudzielności*, że dowolna krawędź w grafie G ma jeden koniec w jednej a drugi w drugiej klasie dwudzielności.

k-pokolorowaniem krawędzi grafu G nazywamy dowolną funkcję, która każdej krawędzi przypisuje liczbę ze zbioru $\{1, 2, \dots k\}$.

k-pokolorowanie krawędzi grafu nazywamy *dobrym* jeśli każde dwie krawędzie o wspólnym końcu mają rózne kolory.

Minimalną liczbę kolorów potrzebną do dobrego pokolorowania krawędzi grafu G nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu G i oznaczamy przez $\chi'(G)$.

Graf G nazywamy *płaskim* jeśli można go narysować w taki sposób, że krawędzie przecinają się jedynie w wierzchołkach będących ich końcami. Taki rysunek grafu nazywamy *reprezentacją płaską* grafu G.