

LZZ  
ZADANIA z MATEMATYKI DYSKRETNEJ  
CZĘŚĆ 4. RÓWNANIA REKURENCYJNE.

- Znajdź wzór jawny na  $n$ -ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie w następujący sposób:
  - $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$  dla  $n \geq 0$  oraz  $a_0 = 1, a_1 = 2$ ,
  - $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$  dla  $n \geq 2$  oraz  $a_0 = 1, a_1 = 2$ .
  - $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$  dla  $n \geq 2$  oraz  $a_0 = 0, a_1 = 1$ .
- Oprocentowanie wkładów w banku wynosi 10% w skali rocznej. Co się bardziej opłaca: przez  $n$  lat wpłacać po 100 euro na koniec każdego roku czy raz na początku wpłacić 1000 euro?
- Wiadomo, że co roku pewien pracownik otrzymuje podwyżkę pensji, która wynosi 20% kwoty pensji wypłacanej przez ostatni rok pomniejszone o 11% kwoty pensji wypłacanej rok wcześniej. Na początku pracownik zarabia 1 tys. euro. Ile będzie zarabiał po  $n$  latach?
- "Parowa" pożyczył od chłopaków z miasta 1 mln euro na 50% rocznie (odsetki są doliczane na koniec każdego roku). Na koniec każdego roku spłaca 0.2 mln. euro. Ile będzie wynosił jego dług po  $n$  latach? (znajdź wzór jawny)
- Pewien ochroniarz pobrał za ochronę restauracji za pierwszym razem 10 euro. Za każdym następnym razem pobierał haracz stanowiący sumę podwojonego haraczu pobranego ostatnim razem i dodatkowych 5 euro. Znajdź wzór jawny na  $h_n$  - haracz (w euro) pobrany za  $n$ -tym razem.
- Pewien handlowiec sprzedawał jedną jednostkę towaru z pierwszej dostarczonej mu partii przez głównego handlowca po 10 euro a a drugiej partii po 11 euro. Przy każdej następnej dostawie cena jednostki towaru była ustalana jako różnica pomiędzy siedmiokrotną ceną jednostki z poprzedniej dostawy i sześciokrotną ceną jednostki towaru z przedostatniej dostawy. Znajdź wzór jawny na  $j_n$ -cenę jednostki towaru (w euro) z  $n$ -tej partii (dostawy).
- W pewnym państwie cena bananów w momencie wstąpienia do UE wynosiła 1 euro a w miesiąc po wstąpieniu wynosiła 2 euro. W każdym następnym miesiącu cena bananów była ustalana jako różnica pomiędzy potrojoną ceną bananów z poprzedniego miesiąca i podwojoną ceną bananów sprzed dwóch miesięcy. Znajdź wzór jawny na  $b_n$ -cenę bananów (w euro) w  $n$  miesiący po wstąpieniu do UE.

ODPOWIEDZI

1) a)  $a_n = \frac{1}{4}[(-1)^n + 3^{n+1}]$ , b)  $a_n = \frac{1}{3}[(-1)^{n+1} + 2^n]$ , c)  $a_n = -\frac{1}{3}(-2)^n + \frac{4}{3}$ . 2) Bardziej opłaca się wpłacić 1000 na początku. 3)  $a_n = (0.1)^{n+1} + 0.9 \cdot (1.1)^n$ . 4)  $d_n = (1.5)^n - 0.4((1.5)^n - 1)$ . 5)  $h_n = 7.5 \cdot 2^n - 5$ . 6)  $j_n = 9.8 + 0.2 \cdot 6^n$ . 7)  $b_n = 2^n$ .

PRZYKŁADOWE KOŁOKWIUM 2

1) (5 pkt) Ile jest liczb naturalnych nie większych od 9000, które nie są podzielne przez żadną z następujących liczb : 4 ,6, 9.

2) (4 pkt) Spośród 30 osób przebywających na prywatce każda pije oranżadę, wodę lub sok. 6 pije oranżadę i sok ( i być może inny napój ), 19 pije sok ( i być może inny napój ), 15 pije oranżadę ( i być może inny napój ). Ile osób nie pije ani oranżady ani soku?

3) (5 pkt) Zysk z pewnej działalności wyniósł w pierwszym miesiącu 2 (miliony euro). W każdym następnym miesiącu zysk z tej działalności był równy podwojonemu zyskowi z poprzedniego miesiąca pomniejszonemu o 1 (milion euro). Znajdź wzór jawny na  $z_n$  - zysk z tej działalności w  $n$ -tym miesiącu.

4) (5 pkt) Pewien student wypił pierwszego dnia zajęć 1 litr piwa (bezalkoholowego) a drugiego dnia 4 litry. Każdego następnego dnia zajęć liczba wypitych litrów piwa przez tego studenta stanowiła różnicę pomiędzy pomnożoną przez 5 liczbą litrów piwa wypitych poprzedniego dnia zajęć i pomnożoną przez 4 liczbą litrów piwa wypitych dwa dni (zajęć) wcześniej. Znajdź wzór jawny na  $l_n$ - liczbę litrów piwa wypitych przez tego studenta  $n$ -tego dnia zajęć

ODPOWIEDZI DO PRZYKŁADOWEGO KOŁOKWIUM 2:

1) 5500, 2) 2, 3)  $z_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n + 1$ , 4)  $l_n = \frac{1}{4} \cdot 4^n$ .