WERYFIKACJA HIPOTEZ O RÓWNOŚCI WARTOŚCI OCZEKIWANEJ W DWÓCH POPULACJACH.

Badana cecha X ma rozkład normalny $N(m_1, \sigma_1)$ w populacji I, z której pobrano próbkę o liczności n_1, i rozkład $N(m_2, \sigma_2)$ w populacji II, z której pobrano próbkę o liczności n_2 .

Weryfikacja hipotezy $H_0 : m_1 = m_2$ na poziomie istotności α.

Model 1 . σ_1, σ_2 znane.
Obliczamy wartość statystyki testowej

$$U = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}}$$

(statystyka U ma rozkład $N(0, 1)$).

Hipotezę H_0 odrzucamy (H_1 przyjjmujemy) gdy obliczona wartość statystyki U należy do zbioru krytycznego W. W przeciwnym przypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

$$W = (-\infty, -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty), \text{ gdy } H_1 : m_1 \neq m_2$$

$$W = (u_{1-\alpha}, +\infty), \text{ gdy } H_1 : m_1 > m_2$$

$$W = (-\infty, -u_{1-\alpha}), \text{ gdy } H_1 : m_1 < m_2.$$

Model 2. σ_1, σ_2 nieznane (zakładamy, że $\sigma_1 = \sigma_2$).
Obliczamy wartość statystyki testowej

$$T = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 {s_1}^2 + n_2 {s_2}^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}}$$

(statystyka T ma rozkład t-Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody).

Hipotezę H_0 odrzucamy (H_1 przyjjmujemy) gdy obliczona wartość statystyki T należy do zbioru krytycznego W. W przeciwnym przypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

$$W = (-\infty, -t(\alpha, n_1 + n_2 - 2)) \cup (t(\alpha, n_1 + n_2 - 2), +\infty), \text{ gdy } H_1 : m_1 \neq m_2$$

$$W = (t(2\alpha, n_1 + n_2 - 2), +\infty), \text{ gdy } H_1 : m_1 > m_2$$

$$W = (-\infty, -t(2\alpha, n_1 + n_2 - 2)), \text{ gdy } H_1 : m_1 < m_2.$$

Opis danych:
n_1, n_2 - liczność próbek pobranych odpowiednio z populacji I i II;
x_1, x_2 - średnia z próby dla populacji I i II;
S_1, S_2 - odchylenie standardowe z próby dla populacji I i II;
α - poziom istotności; u_α - kwantyl rzędu α rozkładu $N(0, 1)$;
$t(\alpha, n)$ - wartość krytyczna (kwantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$) rozkładu t-Studenta o n stopniach swobody.