ZADANIA ZE STATYSTYKI
CZĘŚĆ 2.
ZMIENNA LOSOWA JEDNOWYMIAROWA.

1. Zorganizowano następującą grę. Rzucamy dwiema kostkami. Jeśli suma oczek jest równa 2 - otrzymujemy 5 zł, jeżeli 3 - 3 zł, a w każdym innym przypadku płacimy 1 zł. Niech X oznacza wygraną. Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa i dystrybuantę zmiennej losowej X.
2. Zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1 = \frac{2}{7}$, $p_2 = \frac{4}{7}$, $p_3 = c$. Znaleźć stałą c oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.
3. Zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1 = c$, $p_2 = 2c$, $p_3 = 3c$. Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.
4. Zmienna losowa X przymuje wartości całkowite dodatnie z prawdopodobieństwem $P(X = k) = \frac{c}{2^k}$. Obliczyć a) stałą c, b) $P(X \geq 4)$.
5. Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X: $P(X = 0) = 0.4$, $P(X = -1) = 0.3$, $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = c$. Znaleźć a) stałą c, b)dystrybuantę zmiennej losowej X, c) funkcję prawdopodobieństwa oraz dystrybuntę zmiennej losowej $Y = X^2 - 2X$, d) $P(-\frac{1}{2} \leq Y < 1)$.
6. Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X: $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = -1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.3$. Znaleźć a)dystrybuantę zmiennej losowej X, b) funkcję prawdopodobieństwa oraz dystrybuntę zmiennej losowej $Y = X^2$, c) $P(-1 < X \leq 2)$.
7. Zmienna losowa X ma gęstość określoną wzorem:
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in < -1, 0) \\ -x+1 & \text{dla} x \in (0,1) \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$
Wyznaczyć a) dystrybuantę $F(x)$; b) x_0 takie, że $P(X \geq x_0) = \frac{7}{8}$.
8. Zmienna losowa X ma gęstość określoną wzorem:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ c \cdot \sin x & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{dla } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
Wyznaczyć a) stałą c; b) dystrybuantę $F(x)$; c) $P(\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{\pi}{4})$. Otrzymany wynik zilustrować na wykresach gęstości i dystrybuanty.
9. Gęstość zmiennej losowej X ma postać:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \text{ lub } x \geq a \\ \ln x & x \in (1, a) \end{cases}$$
a) Obliczyć stałą a, b) znaleźć dystrybuantę, c) obliczyć $P(2 < X < e)$. Otrzymany wynik zilustrować na wykresach gęstości i dystrybuanty.
10. Sprawdzić, że ciąg $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ określa rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, która przyjmuje wartości $n = 1, 2, 3, \ldots$. Obliczyć $P(X < 3)$, $P(X < 2)$.
11. Czy funkcja $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ może być dystrybuantą zmiennej losowej typu ciągłego dla : a) $-\infty < x < \infty$; b)$0 < x < \infty$; c) $-\infty < x < 0$.

12. Dana jest funkcja gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2x - x^2) & \text{dla } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej X i obliczyć $P(X < 1)$.

13. Dystrubuanta zmiennej losowej X ma postać:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ A + Barcsin\frac{x}{2} & |x| < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

a) Dla jakich A, B zmienna X jest zmienną losową ciągłą.
b) Znaleźć gęstość zmiennej losowej X.

14. Gęstość zmiennej losowej X ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & \text{dla } |x| > a \\ 0 & \text{dla } |x| \leq a \end{cases}$$

a) Wyznaczyć stałą a. b) Znaleźć i narysować dystrybuantę $F(x)$. c) Obliczyć i zaznaczyć na wykresach gęstości i dystrybuanty $P(|X| \geq 5)$, d) Wyznaczyć x_0 takie, że $P(X \geq x_0) = \frac{1}{8}$.

15. Gęstość zmiennej losowej X ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej a) $Y = e^{-X}$, b) $Z = \frac{1}{X^2}$.

16. Zmienna losowa X ma gęstość określoną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \in < -1, 0) \\ -x + 1 & \text{dla} x \in (0, 1) \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej: $Y = e^X$.

17. Promień koła jest zmienną losową R o gęstości postaci:

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < 0 \\ e^{-r} & \text{dla } r \geq 0 \end{cases}$$

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $S = \pi R^2$

18. Zmienna losowa X ma funkcję prawdopodobieństwa postaci: $P(X = -1) = 0.2$, $P(X = 0) = 0.3$, $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.1$. Znaleźć a) dystrybuantę, b)wartość oczekiwaną, c) wariancję, d) modę, e) medianę f) kwantyl rzędu 0.6 g) kwantyl rzędu 0.4 zmiennej losowej X.

19. Zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_k = \frac{(-1)^k 2^k}{k}$ z prawdopodobieństwami $p_k = \frac{1}{2^k}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Czy istnieje wartość oczekiwana zmiennej losowej X?

20. Gęstość zmiennej losowej X ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 1 \text{ lub } x \geq e \\ \ln x & x \in (1, e) \end{cases}$$

Wyznaczyć moment zwykły rzędu k oraz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X.

21. Zmienna losowa X ma gęstość:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^{a+1}} & \text{dla } |x| > 1, \quad (a > 0) \\ 0 & \text{dla } |x| \leq 1 \end{cases}$$

a) Podać warunek istnienia momentu rzędu k zmiennej losowej X.
b) Dla jakich wartości a istnieje wariancja zmiennej losowej X.
c) Wyznaczyć $D^2(X)$.

22. Zmienna losowa X przyjmuje wartości :
a) $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$ z jednakowymi prawdopodobieństwami;
b) $1, 2, 3, \ldots, n$ z jednakowymi prawdopodobieństwami;
Znaleźć wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej.

23. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arcsin x & \text{dla } |x| < 1 \\ 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Wyznaczyć a) wartość oczekiwaną, b)kwantyl rzędu 0.75 zmiennej losowej X.

24. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} arctg x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

25. Zmienna losowa X ma gęstość:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{dla } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$$

Wyznaczyć a)dystrybuantę b) $P(|X| < 2)$. Otrzymany wynik zaznaczyć na wykresach gęstości i dystrybuanty. Obliczyć c) wartość oczekiwaną, d) medianę, e) modę f) kwantyl rzędu $\frac{5}{6}$.

26. Wyznaczyć a) modę, b) medianę, c) wartość oczekiwaną, d) kwantyl rzędu $\frac{1}{8}$, e) kwantyl rzędu $\frac{5}{8}$ zmiennej losowej X o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}|\sin x| & \text{dla } 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

27. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany student pewnej grupy umie rozwiązać to zadanie wynosi $\frac{8}{10}$. Prowadzący zajęcia sprawdza czy studenci potrafią poradzić sobie z tym zadaniem prosząc o podanie rozwiązania kolejnych losowo wybranych studentów. Sprawdzanie kończy się po przepytaniu 3 studentów lub w momencie trafienia na osobę, która potrafi je rozwiązać. Studenci odpowiadają niezależnie od siebie. Wyznaczyć a) funkcję prawdopodobieństwa, b) dystrybuante, c) wartość oczekiwaną liczby przepytanych studentów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ Z CZĘŚCI 2

4) $c = \frac{1}{6}$; 5) a) $c = 1$; b) $\frac{1}{8}$; 6) a) $c = 0.2$; d) 0.4; 7) b) $x_0 = -\frac{1}{2}$; 9) a) $a = e$; c) $2 - 2\ln 2$; 12) $P(X < 1) = \frac{1}{2}$; 15) a) 1; b) 1; c) $\frac{1}{6}$; d)$\frac{\sqrt{2}}{2}$; 17) $\frac{1}{10}$, tak; 18)b) 0.8; c) 1.86 d) $m_0' = 0$, $m_0" = 2$; e) $x_{\frac{1}{2}} \in <0, 1>$; f)$x_{0.6} \in <1, 2>$; g) $x_{0.4} = 0$; 19) tak; 20) $m_k = E(X^k) = \frac{k \cdot e^{k+1} + 1}{(k+1)^2}$; 21) c) $\frac{a}{a-2} - (\frac{a}{a-1})^2$; 23) a) 0; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 25) b) $\frac{1}{2}$; c) nie istnieje; d) $x_{\frac{1}{2}} \in <-1; 1>$; e) $m_0' = -1$, $m_0" = 1$; f) $x_{\frac{5}{6}} = 3$; 26) a) $m_0' = \frac{\pi}{2}$; $m_0" = \frac{3\pi}{2}$; b) π; c) π; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\frac{4\pi}{3}$; 27) a) $P(X = 1) = 0.8$, $P(X = 2) = 0.16$, $P(X = 3) = 0.04$; c) 1.24.