21-23 lutego 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II

1. Rozwiązać równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

   a) $x(y^2-4)dx + ydy = 0$

   b) $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$

   c) $\ln(\cos y)dx + x \operatorname{tg} y dy = 0$

   d) $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$; $y(1) = 0$

   e) $y' \operatorname{tg} x - y = -2$

2. Rozwiązać jednorodne równania różniczkowe:

   a) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

   b) $y' = \frac{y^2}{xy-x^2}$

   c) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

2. Rozwiązać równania różniczkowe:

   a) $y' = 2x + y + 3$

   b) $y' = (2y + 6x + 1)^2$

   c) $y' = \cos^2(x-y)$

26 lutego - 2 marca 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II

1. Rozwiązać liniowe równania różniczkowe:

a) $y' + y = e^{-x}$

b) $y' - 2yx = x - x^3$

c) $y' - 3y = e^{3x}$

d) $y' + y = \cos x$

2. Rozwiązać równania zupełne:

a) $2 - (\frac{y}{x})^2 + 2(\frac{y}{x})y' = 0$

b) $(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0$

c) $ye^x + (y + e^x)dy = 0$

d) $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0$

3.Rozwiązać równania spowadzając przy pomocy czynnika całkującego do równań zupełnych:

a) $(y + \ln x)dx - xdy = 0$

b) $ydx - (x + y^2)dy = 0$

5-9 marca 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II

1. Rozwiązać równania Bernouliego :

a) $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$

b) $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$

c) $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$

2. Rozwiązać równania liniowe:

a) $y'' - y' - 2y = 0$

b) $y'' + 5y' + 6y = 0$ z warunkami $y'(0) = -6$, $y(0) = 1$

c) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$

d) $y'' + 4y = 1 + \sin 2x$ z warunkami $y'(0) = 0$, $y(0) = \frac{1}{4}$

e) $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$

12-16 marca 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II

1. Rozwiązać układy równań

a)

$$\begin{cases} z' = -7z + y \\ y' = -2z + 5y \end{cases}$$

ogólną i dla warunku $z(0) = y(0) = 1$

b)

$$\begin{cases} y' = 2y + 4z + e^x \\ z' = 4y + 2z + e^x \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x' + y' = 2(x + y) \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x' + \frac{2x}{t} = 1 \\ y' = x + y + \frac{2x}{t} - 1 \end{cases}$$

3. Znaleźć i naszkicować rodziny linii ortogonalnych do

a) rodziny parabol $y = ax^2$

b) rodziny okręgów $x^2 + y^2 = 2ax$

c) rodziny parabol $y^2 = 4(x - a)$

4. Obliczyć całki podwójne iterowane:

a) $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx$

b) $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$

c) $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$

d) $\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x + 2y)dx$

e) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} r dr$

19-30 marca 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II-5

1. Zmienić kolejność całkowania:

a) $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$;

b) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$;

c) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$;

d) $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$;

e) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy$;

2. Obliczyć całki:

a) $\int\int_S xdxdy$, gdzie S trójkąt o wierzchołkach $(0,0),(1,1),(0,1)$;

b) $\int\int_S \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$; S $\frac{1}{4}$ koła o promieniu a , środku w $(0,0)$ w I ćwiartce układu;

c) $\int\int_S \sqrt{xy-y^2}dxdy$; gdzie S trójkąt o wierzchołkach $(0,0),(10,1),(1,1)$;

d) $\int\int_S e^{\frac{x}{y}}dxdy$; gdzie S obszar ograniczony parabolą $y^2=x$, i prostymi $x=0, y=1$;

3. Obliczyć pole krzywoliniowych czworokątów ograniczonych liniami:

a) $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=\alpha x$, $y^2=\beta x$
Wskazówka: zamienić zmienne $x^2=uy, y^2=vx$

b) $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=\alpha$, $xy=\beta$
Wskazówka: zamienić zmienne $y^2=ux, xy=u$

W obu przypadkach $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$.

4.

a) Opisując obszar D jako normalny względem obu osi obliczyć dwoma sposobami

$$\int\int_D 2ydxdy$$

gdzie D obszar ograniczony przez krzywe $y=\sqrt{x}, y=0, x+y=2$. (odp: $\frac{5}{6}$)

b) Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z=0, y=1, z=x^2+y^2, y=x^2$ (odp: $\frac{88}{105}$)

c) Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $3x-y=2, x+y=6$,
$y=x$, $z=x, z=2x+y$ (odp: $\frac{28}{3}$)

26-30 marca 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II-6

1. Oblicz objętość brył ograniczonych powierzchniami:

   a) $z = 2x^2 + y^2 + 1$, $x + y = 1$ i płaszczyznami układu współrzędnych.

   b) $z = x^2 - y^2, y = 0, z = 0, x = 1$

   c) $z = x^2 + y^2, y = x^2, z = 0, y = 1$

2. Stosując zmienne

a) sferyczne,

b) cylindryczne

obliczyć objętość bryły ograniczonej sferą $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i walcem $x^2 + y^2 = ay$ $a > 0$

3. Znaleźć masę bryły

   a) ograniczonej powierzchnią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ o gęstości $\varrho(x, y, z) = z^2$ Odp.$\frac{324\pi}{5}$

   b) ograniczonej powierzchnią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ i stożkiem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ o gęstości $\varrho(x, y, z) = kz$

   c) kostki o krawędzi równej 2 jeśli gęstość w każdym punkcie równa jest odległości punktu od podstawy kostki Odp.8

4. Znaleźć środek ciężkości

   a) półkuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ o gęstości $\varrho(x, y, z) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Odp.$\frac{2R}{5}$

   b) półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ o gęstości $\varrho(x, y, z) = 1$ Odp.$z_0 = \frac{R}{2}$

02-13 kwietnia 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II-7

1. Oblicz zorientowane całki krzywoliniowe:

a) $\int_K xydx + (y-x)dy$, gdzie K łuk krzywej $y = x^3$ od $(0,0)$ do $(1,1)$

b) $\int_K ydx + xdy$, gdzie K łuk okręgu o środku w $(0,0)$ i promieniu R od $(0,R)$ do $(R,0)$

c) $\int_K xdx + ydy + (x+y+1)dz$, gdzie K odcinek prostej od $(1,1,1)$ do $(2,3,4)$

d) $\int_K yzdx + xzdy + xydz$, gdzie K łuk linii śrubowej $x = R\cos t, y = R\sin t, z = \frac{at}{2\pi}$ od punktu przecięcia z płaszczyzną $z = 0$ do $z = a$.

2. Oblicz całki w polach potencjalnych:

a) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy$,

b) $\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy$,

c) $\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} xdx + -y^2dy + zdz$,

d) $\int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yzdx + zxdy + xydz$,

3. Korzystając z tw. Greena policzyć całkę $\oint_K (xy+x+y)dx + ydy + (xy+x-y)dz$, gdzie K dodatnio zorientowana pętla:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) $x^2 + y^2 = ax$

4. Sprawdzić tw.Greena w przypadku gdy $\oint_K (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$, $K = K_1 \cup K_2$ gdzie K_1 odcinek prostej od $(0,0)$ do $(1,1)$ a K_2 łuk paraboli $y = x^2$ od $(1,1)$ do $(0,0)$.

16-20 kwietnia 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II-8

1. Wprost i z tw. Gaussa obliczyć :

a) $\int\int_S y^2zdxdy + xzdydz + xydzdx$, gdzie S zewnętrzna strona powierzchni piramidy ograniczonej płaszczyznami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$;

b) $\int\int_S yzdxdy + xzdydz + x^2ydzdx$, gdzie S zewnętrzna strona powierzchni położonej w I oktancie i utworzonej z płatów paraboloidy $z = x^2 + y^2$, walca $1 = x^2 + y^2$ i płaszczyzn $x = 0, y = 0, z = 0$

2. Wprost i z tw. Stokesa obliczyć

a) $\int_L x^2y^3dx + dy + zdz$, gdzie L brzeg półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$

b) cyrkulację pola $[xy, 0, xz]$ po krzywej będącej brzegiem ćwiartki sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

3. Policzyć całkę $\int\int_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, gdzie S półsfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$

Wskazówka: zamknąć powierzchnię płatem $z = 0$, policzyć obie strony wzoru Gaussa i całkę przez dodatkowy płat.

23-27 kwietnia 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II-9

Oznczenia: $\Im(z)$ oznacza część urojoną , a $\Re(z)$ część rzeczywistą z.

1.Narysować linię na płaszczyźnie zespolonej:

a) $z = t + jt,\ t \in R$

b) $z = 2(1 + e^{jt}),\ t \in (-\pi, \pi)$

c) $z = 2t^2 + jt\ ,\ t \in [0, \infty)$

d) $z = t(j + e^{-jt}),\ t \in (0, \infty)$

2. Obliczyć granice ciągów:

a) $z_n = \frac{2n^2}{n^3+2} + j\frac{3n^2}{n^2+1}$

b) $z_n = \frac{n(1+e^{jn})}{(n+1)^2}$

3. Policzyć całkę oznaczoną $\int_0^2 (t^2 + j(t^3 + 2t))dt$

4.Znaleźć część rzeczywistą i urojoną:

a) $f(z) = z^3 + z^2 + 1$

b) $f(z) = \sin|z|$

c) $f(z) = 2\Im(z) + 3\Re(z)$

d) $f(z) = j$

5.Sprawdzić holomorficzność:

a) $f(z) = |z|$

b) $f(z) = z|z|)$

c) $f(z) = \Im(z)$

d) $f(z) = j\cos(z)$

5.Sprawdzić holomorficzność i policzyć pochodną:

a) $f(x + jy) = x^2 - y^2 + 2jxy$

b) $f(x + jy) = e^{-x}\cos y - je^{-x}\sin y$

5.Znaleźć funkcję holomorficzną $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ taką, że

a) $u(x, y) = 6x^2y - 2y^3$

b) $v(x, y) = \cos y \cosh x$

30 kwietnia -11 maja 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II-10

1. Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$ w pierścieniach

   a) $P(1, 0, \sqrt{2})$, b) $P(-2j, 3, \infty)$, c) $P(-2j, 1, 3)$

2. Wyznaczyć punkty osobliwe i określić typ osobliwości:

   a) $\frac{ze^z}{(z^2+4)^3}$, b) $\frac{z}{(z^2-1)(z^2-4)}$,

   c) $\frac{z^2}{z(z^3+1)}$, d) $\frac{z}{\sin z}$,

   e) $\frac{\sin z}{z^2}$, f) $e^{\frac{1}{(1-z)^2}}$

3. Znaleźć residua funkcji w danym punkcie

   a) res $_{z=0}\frac{z+1}{(1-z)z^3}$, b)res $_{z=0}\frac{(z+2)^6}{z^6}$,

   c) res $_{z=0}\frac{1-\cos z}{z^3}$, d) res $_{z=\pm j}\frac{z+1}{(z^2+1)}$,

   e) res $_{z\pm 1}\frac{e^{j\pi z}}{z^2+1}$, f) res $_{z=2}e^{\frac{1}{z-2}}$,

   g) res $_{z=1}\frac{e^z}{(z-1)^n}$ dla $n = 0, 1, 2 \ldots$

4. Obliczyć całki

   a) $\oint_{K(0,2)} \frac{e^z dz}{z^2(z^2+1)}$,

   b) $\oint_{K(0,3)} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)^2}$

   c) $\oint_{K(0,1)} \sin \frac{2}{z} dz$,

   d)$\oint_{K(0,2)} z^4 \cos \frac{1}{z} dz$

   e) d)$\oint_{K(0,1)} z^5 e^{\frac{1}{z}} dz$

   f) d)$\oint_{K(0,2)} \frac{z^3 dz}{z^4-1}$

5. Obliczyć całki rzeczywiste:

   a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{x^4+1} dx$

   b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{(x^2+1)^3} dx$

   c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ $n = 1, 2, \ldots$

14-18 maja 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II-11

1. Znaleźć transformatę Laplace'a funkcji $f(t)$ gdzie:

   a) $f(t) = a^t$ $\qquad \frac{1}{s-\ln a}$

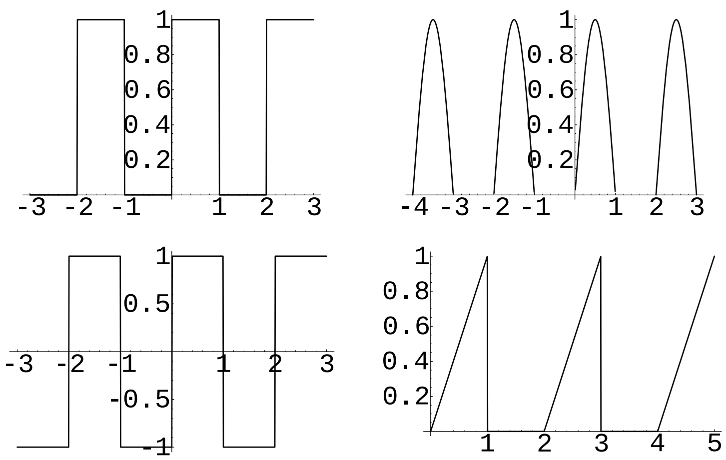
   b) $f(t) = \cos^3 t$ $\qquad \frac{s(s^2+7)}{(s^2+1)(s^2+9)}$

   c) $\sinh(bt)$ $\qquad \frac{b}{s^2-b^2}$

   d) $t\cosh(bt)$ $\qquad \frac{s^2+b^2}{(s^2-b^2)^2}$

   e) $e^t \cos^2 t$ $\qquad \frac{s(s^2+2s+3}{(s-1)(s^2-2s+5)}$

2. Wyrazić przy pomocy $\mathbf{1}(x)$ funkcję o wykresie :



   Odp: a) $\mathbf{1}(x) - \mathbf{1}(x-2)$, b) $\mathbf{1}(x) - 2\mathbf{1}(x-1) + \mathbf{1}(x-2)$, c) $\sum_k (-1)^k \mathbf{1}(3x-k) + \frac{\mathbf{1}(x)}{2}$,
   d) $-(x-4)\mathbf{1}(x-5) + (x-4)\mathbf{1}(x-4) - (x-2)\mathbf{1}(x-3) + (x-2)\mathbf{1}(x-2) - x\mathbf{1}(x-1) + x\mathbf{1}(x)$

3. Znaleźć transformaty Laplace' a funkcji okresowych

   a) $f(t) = t \mod 1$

   b) $f(t) = \begin{cases} 1 & t \mod 1 < 1/2 \\ 0 & t \mod 1 \geqslant 1/2 \end{cases}$

21maja - 1 czerwca 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II-12

1. Znaleźć transformatę odwrotną funkcji

a) $\tilde{f}(s) = \frac{s}{s^2-2s+5}$ Odp: $e^t(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)$

b) $\tilde{f}(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s-2)(s-3)}$ Odp: $-\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}$

c) $\tilde{f}(s) = \frac{s}{(s-1)^3(s+2)^2}$ Odp: $\frac{3t^2+2t-2}{54}e^t + \frac{2t+1}{27}e^{-2t}$

d) $\tilde{f}(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2-4)}$ Odp: $-\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t}$

e) $\tilde{f}(s) = \frac{s+3}{s(s^2-4s+3)}$ Odp: $1 - 2e^t + e^{3t}$

f) $\tilde{f}(s) = \frac{s}{(s^4-1)}$ korzystając z twierdzenia o transformacie splotu. Odp: $\frac{1}{2}(\cosh t - \cos t)$

2. Rozwiązać równania metodą transformaty Laplace'a

a) $\begin{cases} y'' - 9y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$ Odp: $y = 0$

b) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = \sin 2t \\ y'(0) = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ Odp: $y\,(t) = -\frac{3}{4}te^{2t} + \frac{7}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}\cos 2t$

c) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 4, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$ Odp: $y = 1 + e^{2t}$

d) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1 \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 5. \end{cases}$ Odp: $y = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$

3. Rozwiązać równania całkowe

a) $y = \int_0^t y dt + 1$ Odp: $y = e^t$

b) $\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau - 1 + \cos t = 0$ Odp: $y = 1(t)$

4. $\begin{cases} y' = \begin{cases} 1 & 2k < t < 2k+1 \\ 0 & 2k+1 < t < 2k \end{cases} \quad k \in Z \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

04-15 czerwca 2007

ZADANIA Z MATEMATYKI
ELEKTROTECHNIKA sem.II-12

- Znaleźć rozwinięcia w szereg Fouriera funkcje o wykresach :