

## MDM2 Tożsamości

2.1. Udowodnić następujące tożsamości (nadając obu stronom równości odpowiednie interpretacje

kombinatoryczne)

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, & f) \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2, & k) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} = \binom{n}{k} 2^k, \\ b) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, & g) \binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}, & l) * m^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (m-1)^{n-k}. \\ c) \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & h) \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, & m) * \sum_{r=0}^n \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \\ d) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \quad n \neq 0 & i) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i = n 2^{n-1}, & n) * \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}, \\ e) \binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}, & j) \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) 2^{n-2}, & \end{array}$$

2.2. Pokazać, że

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \dots > \binom{n}{n}.$$

2.3.\* Udowodnić następujące tożsamości

$$\begin{array}{l} a) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } n \neq j \\ (-1)^n & \text{jeśli } n = j \end{cases}, \\ b) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \\ c) \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{l} = (-1)^k \binom{n}{l-k}, \end{array}$$