

MDM 4 - Grafy - początek

4.1 Znaleźć wszystkie nieizomorficzne grafy o 4 wierzchołkach.

4.2 Czy istnieją grafy o następujących ciągach stopni wierzchołków :

- a) (5,4,2,2,1,1), b) (4,4,4,3,3,3),
c) (2,2,1,1,1,1), d) (5,5,4,4,2,2),
e) (7,7,7,3,3,3,2,2), f) (7,7,4,4,3,3,2,2) ?

4.3 Czy każde dwa grafy o tym samym ciągu stopni są izomorficzne?

4.4 Graf o 21 krawędziach ma 7 wierzchołków stopnia 1, 3 wierzchołki stopnia 2, 7 wierzchołków stopnia 3, a pozostałe wierzchołki mają stopień 4. Ile wierzchołków ma ten graf? Narysuj go.

4.5 Czy istnieje graf 5-regularny o 11 lub 12 wierzchołkach? Pokazać przykład.

4.6 Pokazać, że wśród n osób ($n \geq 2$) istnieją takie dwie osoby, które znają tę samą liczbę osób (w tej grupie). Zakładamy, że relacja znajomości jest symetryczna tzn. osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy gdy osoba B zna osobę A.

4.7 *Dopełnieniem grafu G* nazywamy graf $\bar{G} = (V(G), \bar{E})$, gdzie $\bar{E} = P_2(V(G)) - E(G)$. Pokazać, dla dowolnego grafu G graf G jest spójny lub graf \bar{G} jest spójny.

4.8 Graf nazywamy *samodopełniającym* jeśli $G \cong \bar{G}$. Podaj przykłady grafów samodopełniających o 4, 5, 6, 7, 8 i 9 wierzchołkach.

4.9 Wykazać, że liczba wierzchołków w grafie samodopełniającym jest postaci $4k$ lub $4k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

4.10 Udowodnij, że jeśli dwa różne cykle w grafie G zawierają tę samą krawędź e , to w grafie G istnieje cykl nie zawierający e .

4.11 Pokazać, że jeśli G jest grafem dwudzielnym (czyli można jego wierzchołki podzielić na dwa zbiory X i Y tak, że każda krawędź łączy wierzchołek z X z wierzchołkiem z Y) to $e(G) \leq \frac{n^2}{4}$.

4.12 Wykazać, że w grupie 6 osób zawsze znajdują się trzy osoby, które albo znają się nawzajem albo żadna z nich nie zna dwóch pozostałych.

4.13 Pokazać, jeśli $e(G) > \binom{n-1}{2}$ to graf G jest spójny.

4.14 Pokazać, jeśli $\delta(G) > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ to G jest spójny.

4.15 Pokazać, jeśli $\delta(G) \geq 2$ to G zawiera cykl.

4.16 Czy prawdziwe jest stwierdzenie : jeśli

$$\forall_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 2$$

i jest parzysty to każdy wierzchołek należy do pewnego cyklu ?

4.17 Pokazać, $\delta(G) \leq \frac{2e(G)}{n} \leq \Delta(G)$.