MDM 5 - Cykl Eulera, Drzewa

5.1 Znaleźć (o ile istnieje) graf eulerowski z parzystą liczbą wierzchołków i nieparzystą liczbą krawędzi.

5.2 Pokazać, że jeśli G jest spójny i ma $2k$ wierzchołków stopnia nieparzystego to istnieją krawędziowo rozłączne ścieżki $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, takie że $E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \ldots \cup E(Q_k) = E(G)$.

5.3 Pokazać, że jeśli G jest grafem eulerowskim to każdy blok jest podgrafem eulerowskim. *Blok* jest to maksymalny podgraf dwuspójny.

5.4 Udowodnić, że jeśli T jest drzewem oraz $\Delta(T) \geqslant k$ to T ma co najmniej k wierzchołków stopnia 1

5.5 Udowodnić, że jeśli G jest grafem spójnym oraz $e \in E(G)$ to e jest w każdym drzewie rozpinającym w G wtedy i tylko wtedy, gdy e jest mostem.

5.6 Niech $e(G) = |G| - 1$. Pokazać, że wtedy następujące warunki są równoważne:

(i) G jest spójny
(ii) G jest acykliczny
(iii) G jest drzewem.

5.7 Znaleźć wszystkie drzewa o 7 wierzchołkach.

5.8 Centrum w grafie nazywamy wierzchołek u, dla którego $\max_{v \in V(G)} d(u, v)$ przyjmuje najmniejszą możliwą wartość. Pokazać, że drzewo posiada albo jedno albo dwa (sąsiednie) centra.

5.9 Pokazać, że każdy graf spójny zawiera wierzchołki, których usunięcie nie powoduje rozspójnienia grafu.

5.10 Pokazać, że w każdym grafie spójnym każde dwie drogi maksymalnej długości mają wspólny wierzchołek.

5.11 Pokazać, że $\omega(G) + e(G) \geqslant n$ dla dowolnego grafu G. ($\omega(G)$ - liczba składowych grafu G, $n = |G|$).

5.12 Pokazać, że jeśli każdy wierzchołek w grafie spójnym G ma stopień parzysty to G nie ma krawędzi rozcinających.