MDM 6 - Spójność, grafy dwudzielne

6.1 Pokazać, że jeśli graf G jest k-regularny ($k \geqslant 2$) i dwudzielny to G nie ma krawędzi rozcinających.

6.2 Pokazać, że jeśli graf G jest 3-regularny to $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

6.3 Pokazać, że dla dowolnych liczb naturalnych $a \leqslant b \leqslant c$ istnieje graf G taki, że $\kappa(G) = a$, $\kappa'(G) = b$, $\delta(G) = c$.

6.4 Pokazać, że jeśli $\delta(G) \geqslant n - 2$ to $\kappa(G) = \delta(G)$. Znaleźć taki graf G, dla którego $\delta(G) = n - 3$ oraz $\kappa(G) < \delta(G)$.

6.5 Pokazać, że jeśli $\delta(G) \geqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ to $\kappa'(G) = \delta(G)$. Znaleźć taki graf G, dla którego $\delta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ oraz $\kappa'(G) < \delta(G)$.

6.6 Pokazać, że jeśli $\delta(G) \geqslant \frac{n+k-2}{2}$ to $\kappa(G) \geqslant k$.

6.7 Niech $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ będzie ciągiem stopni wierzchołków w grafie G. Pokazać, że jeśli $d_k \geqslant k$ dla każdego $k \leqslant n - d_n - 1$ to G jest spójny.

6.8* Niech $U \subset V(G)$ oraz $x \in V(G) - U$. $x - U$ *wachlarzem* nazywamy $|U|$ niezależnych $x - U$ dróg (tj. dróg łączących wierzchołek x z wierzchołkami zbioru U, których jedynym punktem wspólnym jest wierzchołek x). Pokazać, że G jest k-spójny wtedy i tylko wtedy gdy $|G| \geqslant k + 1$ oraz dla każdego $U \subset V(G)$ mocy k i dla każdego $x \in V(G) - U$ istnieje $x - U$ wachlarz.

6.9* Pokazać, że jeśli G jest k-spójny ($k \geqslant 2$) to dla każdych k wierzchołków istnieje cykl zawierający te wierzchołki.

6.10* Pokazać, że jeśli G jest grafem dwudzielnym o klasach X i Y, to maksymalna liczba krawędzi skojarzenia wynosi

$$\min_{A \subset X} (|X - A| + |N(A)|).$$

gdzie $N(A)$ oznacza zbiór sąsiadów w G wierzchołków należących do A.

6.11 Problem haremu: Niech B będzie zbiorem kawalerów i przypuśćmy, że każdy kawaler ze zbioru B chce poślubić więcej niż jedną ze swoich ukochanych, ale nie więcej niż cztery. Sformułuj warunek konieczny i wystarczający na to by problem haremu miał rozwiązanie. Wsk: każdego kawalera zastąpić wieloma kopiami (klonami) i skorzystać z twierdzenia Halla.

6.12 Udowodnić, że graf dwudzielny regularny ma skojarzenie doskonałe (tzn pokrywające wszystkie wierzchołki).

6.13 Udowodnić, że każdy prostokąt łaciński można rozszerzyć do kwadratu łacińskiego (macierz jest prostokątem łacińskim jeśli w żadnej kolumnie ani wierszu nie powtarza się żaden wyraz).

6.14 Wykazać, że prostokąt łaciński $m \times n$ można rozszerzyć na co najmniej $(n - m)!$ sposobów. Znaleźć dolne ograniczenie na liczbę kwadratów łacińskich $n \times n$.

6.15 Przypuśćmy, że warunek Halla jest spełniony i że każda z m dziewcząt akceptuje przynajmniej t kawalerów. Udowodnić przez indukcję po m, że że małżeństwa mogą być skojarzone na $t!$ sposobów gdy $t \leqslant m$ i na $t!//(t - m)!$ sposobów gdy $t > m$.

6.16 Pokazać, że w dowolnej grupie m panien i n kawalerów istnieje k panien, którym można znaleźć mężów wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny podzbiór S panien akceptuje łącznie przynajmniej $|S| + k - m$ kawalerów.