ALzG Zadania trudniejsze

1. Niech V_1, V_2, V_3 będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{K}$. Udowodnić, że:

   a) $(V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3) \subset V_1 \cap (V_2 + V_3)$

   b) Jeśli $V_3 \subset V_1$ to $V_1 \cap (V_2 + V_3) = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$

   c) Jeśli $V_2 \subset V_3$ to $V_2 + (V_3 \cap V_1) = (V_2 + V_3) \cap (V_2 + V_1)$.

   Pokazać, że w podpunkcie a) nie zachodzi równość.

2. Dany jest układ równań

$$\Box x + \Box y + \Box z = 0$$

$$\Box x + \Box y + \Box z = 0$$

$$\Box x + \Box y + \Box z = 0$$

   Dwie osoby grają w ten sposób, że wpisują na zmianę w kwadraciki liczby rzeczywiste. Jeśli po wpisaniu wszystkich liczb okaże się, że układ ma rozwiązanie niezerowe,to wygrywa zaczynający; jeśli układ ma tylko rozwiązanie zerowe to wygrywa drugi z graczy. Dowieśc że zaczynający ma strategię zwycięską.

3. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ będą macierzami kwadratowymi $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych. Uzasadnić, że istnieją liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ nie wszystkie równe zero, takie że

$$det(a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_{n+1} A_{n+1}) = 0.$$

4. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ wybrano liczby $n_1, n_2, \ldots, n_9$. Pokazać, że istnieją liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_9$ nie wszystkie równe zero dla których zachodzi równość $(n_1)^{a_1} (n_2)^{a_2} \ldots (n_9)^{a_9} = 1$.

5. Dany jest ciąg skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych i przekształceń liniowych

$$0 \to V_1 \to V_2 \to \ldots \to V_{n-1} \to V_n \to 0,$$

   gdzie $F_i : V_i \to V_{i+1}$ oraz $ImF_i = kerF_{i+1}$, dla każdego i. Oblicz $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i dimV_i$.

6. Udowodnić, że jeśli F jest operatorem na przestrzeni V, takim że $F^2 \circ (Id - F) = F \circ (Id - F)^2 = 0$ to F jest operatorem rzutowania.Podać przykład operatora F takiego, że $F^2 \circ (Id - F) = 0$ ale F nie jest rzutem,

7. Niech F bdzie operatorem na przestrzeni wektorowej V. Udowodnić, że

   (a) $KerF = kerF^2 \Leftrightarrow kerF \cap ImF = 0$

   (b) $ImF = ImF^2 \Leftrightarrow V = kerF + ImF.$