ALzG 10 Przestrzenie wektorowe

10.1 Udowodnić, że $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią wektorową. Czy następujące podzbiory są jej podprzestrzeniami wektorowymi?
a) $\{(x_1,..,x_n) \in \mathbb{R} : x_1 + .. + x_n = 1\}$,
b) $\{(x_1,..,x_n) \in \mathbb{R} : x_1 + .. + x_n = 0\}$.
Jaką postać mają podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$?

10.2 Zbadać które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{K}^4$ są podprzestrzeniami wektorowymi ($\mathbb{K}$ jest ciałem, $+,-$ są działaniami w $\mathbb{K}$):
a) $U = \{[t, t+1, 0, 1] : t \in \mathbb{K}\}$,
b) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t, u \in \mathbb{K}\}$,
c) $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in \mathbb{K}\}$,
d) $U = \{[x, y, z, t] : xy = 0\}$.

10.3 Zbadać które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$ są podprzestrzeniami wektorowymi:
a) $U = \{[t, u, t+u, t-u] \in \mathbb{R}^4 : t \leqslant u\}$,
b) $U = \{[t, u, t, 0] \in \mathbb{R}^4 : tu \geqslant 0\}$,
c) $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$.

10.4 Udowodnić, że zbiór wszystkich rozwiązań dowolnego jednorodnego układu równań o n niewiadomych o współczynnikach rzeczywistych tworzy podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

10.5 Czy wielomiany stopnia n tworzą przestrzeń wektorową?

10.6 Udowodnić, że wielomiany stopnia co najwyżej n o współczynnikach rzeczywistych tworzą przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$. Czy następujące podzbiory są jej podprzestrzeniami wektorowymi?
a) wielomiany, których pierwiastkiem jest pewna ustalona liczba $r \in \mathbb{R}$,
b) wielomiany, których pierwiastkiem k-krotnym jest pewna ustalona liczba $r \in \mathbb{R}$.
c) wielomiany, których pierwiastkiem co najmniej k-krotnym jest pewna ustalona liczba $r \in \mathbb{R}$.

10.7 Udowodnić, że zbiór ciągów o wyrazach rzeczywistych $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ tworzy przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$. Czy następujące podzbiory są jej podprzestrzeniami wektorowymi?
a) ciągi ograniczone,
b) ciągi zbieżne,
c) ciągi zbieżne do 0,
d) ciągi zbieżne do 1,
e) ciągi o prawie wszystkich wyrazach równych zero tzn. takich których "tylko" skończona liczba wyrazów jest różna od zera,
f) ciągi, których suma kwadratów wyrazów jest skończona,
g) ciągi a_n, takie że $a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$ dla każdego $i = 2, 3, \ldots$,
h) ciągi a_n, takie że $a_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1})$, dla $i = 2, 3, \ldots$.

10.8 Udowodnić, że zbiór a) funkcji, b) funkcji ciągłych, c) funkcji różniczkowalnych, $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ tworzy przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$.

10.9 Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym oraz niech $V = \mathbb{R}^A$ będzie przestrzenią funkcji $A \to \mathbb{R}$. Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^A$ są podprzestrzeniami liniowymi:
a) zbiór wszystkich funkcji parzystych, gdy $A = \mathbb{R}$,
b) zbiór wszystkich funkcji nieparzystych , gdy $A = \mathbb{R}$,
c) zbiór wszystkich funkcji rosnących , gdy $A = \mathbb{R}$,
d) zbiór wszystkich funkcji monotonicznych, gdy $A = \mathbb{R}$,
e) $U = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$, gdy $A = [0, 1]$,
f) $U = \{f \in V : f(x) = 0 \text{ dla } x \in B\}$, gdy $B \subsetneq A$,

g) zbiór wszystkich funkcji ograniczonych,
h) zbiór wszystkich funkcji okresowych, gdy $A = \mathbb{R}$,
i) zbiór wszystkich funkcji okresowych z okresem 1, gdy $A = \mathbb{R}$.

10.10 Macierz $A \in M_n^n(\mathbb{K})$ nazywamy symetryczną gdy $A = A^T$ i antysymetryczną gdy $A = -A^T$. Udowodnić że zbiór wszystkich macierzy symetrycznych jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n^n(\mathbb{K})$. Udowodnić, że zbiór wszystkich macierzy antysymetrycznych jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n^n(\mathbb{K})$.

10.11 Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Czy a) $V_1 \cup V_2$ b) $V_1 \cap V_2$ będą podprzestrzeniami V?

10.12 Udowodnić, że dowolne ciało jest przestrzenią wektorową nad swoim dowolnym podciałem w szczególności nad sobą samym.

10.13 Wykazać , że $V = \mathbb{C}$ ze zwykłym dodawaniem jako dodawaniem wektorów i operacją mnożenia przez skalar

$$* : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (z, v) \mapsto z * v := \overline{z} \cdot v$$

jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb zespolonych.

10.14 Wykazać że $V = \mathbb{C}$ ze zwykłym dodawaniem jako dodawaniem wektorów i operacją mnożenia przez skalar

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (x, v) \mapsto x \cdot v$$

jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$.

10.15 Niech V będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru X. Określamy w V działania: dla dowolnych $A, B \subset X$, $\quad 0 \cdot A = \emptyset$, $\quad 1 \cdot A = A$, $\quad A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Wykazać, że V z tymi działaniami jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{Z}_2$

10.16 Sprawdzić czy zbiór $\mathbb{R}^2$ z dodawaniem po współrzędnych i mnożeniem przez liczby rzeczywiste zdefiniowanym następująco: $a \odot (x_1, x_2) = (ax_1, x_2)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych? A gdy mnożenie zdefiniowane jest następująco: $a \odot (x_1, x_2) = (ax_1, 0)$?

10.17 Niech $V = \mathbb{R}^+$ i definiujemy $a \oplus b = ab, \quad r \odot a = a^r$ dla $a, b \in \mathbb{R}^+, \quad r \in \mathbb{R}$. Czy $\mathbb{R}^+$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$?

10.18 Niech $V = \mathbb{C}^4$, $U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in V : z_1 = z_2 = 0\}$. Wektory dodawać będziemy w zwykły sposób (po współrzędnych) natomiast mnożenie przez skalary $\in \mathbb{C}$ zdefiniujemy na cztery różne sposoby:
a) $z \cdot v = 0$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $v \in V$.
b) $z \cdot v = v$, dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $v \in V$. c) $z \cdot v = (Rez)v$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $v \in V$.
d) $z \cdot v = z \cdot v$, gdy $z \in \mathbb{C}$ oraz $v \in U$ oraz $z \cdot v = \overline{z} \cdot v$, gdy $z \in \mathbb{C}$ oraz $v \in V - U$.
Sprawdzić, że w każdym z czterech powyższych przykładów dokładnie jeden z aksjomatów przestrzeni liniowej nie jets spełniony. Jaki wniosek związany z wzajemną zależnością aksjomatów przestrzeni liniowej wynika z tego faktu.

10.19 Niech $(V, +)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Niech $v, u \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$, $a - b = a + (-b)$ i $v - u = v + (-u)$. Dowieść, że:
a) $-(v + u) = (-u) - v$,
b) $a(v - u) = av - au$,
c) $(a - b)v = av - bv$,
d) $a(-v) = (-a)v = -av$,
e) $av = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee v = 0$.