ALzG 11 Liniowa niezależność, generowanie podprzestrzeni

11.1 Czy podany układ wektorów jest liniowo niezależny a) $([1,-1,1],[-1,1,1],[0,0,2])$,
b) $([1,-1,1],[-1,1,1],[0,1,1])$
c) $([1,-1,1],[2,1,1],[1,3,1])$.

11.2 Dla jakich wartości parametru r wektor $(r,8,6)\in\mathbb{R}^3$ jest kombinacją liniową wektorów
$(3,4,5),(1,4,4),(7,4,7)$.

11.3 Dla jakich wartości parametrów $s,t\in\mathbb{R}$ wektory $(5,7,s,2)$, $(1,3,2,1)$, $(2,2,4,t)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ tworzą układ liniowo niezależny?

11.4 Czy układ wektorów $([i,-1,1],[2,i,1],[1,3,i])$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$ jest liniowo niezależny? Przedstawić wektor $[2,3,1+2i]$ jako ich kombinację liniowe.

11.5 Czy w przestrzeni $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ podany układ wektorów jest liniowo niezależny
a) $(x+3;(x-3)^3;\frac{4}{5};3x^2;x^3-4)$,
b) $(x+1;x^3+2x;x^2-5x+2;7x^3+2x^2)$,
c) $(\frac{1}{3}x^2+5x;-x^3;2x+1;5x)$, d) $(x,\sin x,\cos x)$,
e) $(\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x)$, f) $\{\cos 2x,\sin^2 x,\cos^2 x)$.

11.6* Sprawdzić, czy układ wektorów
$([1,2,3,1],[4,1,5,4],[2,1,3,4],[5,4,2,2])$ przestrzeni Z_7^4 jest liniowo zależny.

11.7 Niech $v_1,..,v_n$ - układ wektorów liniowo niezależnych.
Dla jakich $a_1,..,a_n\in\mathbb{K}$ układ $v_1,..,v_{n-1},a_1v_1+..+a_nv_n\in\mathbb{K}$ jest również liniowo niezależny?
Dla jakich $a_{1,1},..,a_{1,n},..,a_{k,1},..a_{k,n}$ układ $a_{1,1}v_1+..+a_{1,n}v_n,..,a_{k,1}v_1+..+a_{k,n}v_n$ jest liniowo niezależny?

11.8* Liczbę rzeczywistą a nazywamy *liczbą algebraiczną*, gdy istnieje niezerowy wielomian $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ którego a jest pierwiastkiem. Pokazać, że liczba a jest algebraiczna wtedy i tylko wtedy , gdy układ $(1,a,\,a^2,a^3,\ldots)$ wektorów z przestrzeni $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$ jest liniowo zależny.

11.9 Sprawdzić czy wielomiany $1,x,x^2,\ldots,x^n$ są liniowo niezależne w przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}[x]$. Sprawdzić, czy dla danego $a\in\mathbb{K}$, wielomiany $1,x-a,(x-a)^2,\ldots,(x-a)^n$ są liniowo niezależne w tej samej przestrzeni.

11.10 Sprawdzić, czy $f_1,f_2,\ldots,f_n$ są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, jeśli $f_i(x)=|x-1|\cdot|x-2|\cdot\ldots\cdot|x-i|$ dla $x\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$.

11.11 Sprawdzić czy funkcje $\frac{1}{x},\frac{1}{x-1},\frac{1}{x-2},\ldots,\frac{1}{x-n}$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{Q}(x)$ wszystkich funkcji wymiernych nad ciałem $\mathbb{Q}$.

11.12 Niech $a_1,\ldots a_k$ będzie ciągiem parami różnych liczb rzeczywistych. Dla $i=1,\ldots k$ niech $f_i:R\to R$ będzie funkcją zadaną wzorem $f_i(x)=|x-a_i|$. Wykazać, że układ wektorów $f_1,\ldots,f_k$ przestrzeni $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ jest liniowo niezależny.

11.13* Znaleźć taki wektor $[x_1,x_2,x_3]$ przestrzeni Z_2^3, aby wektory $[x_1,x_2,x_3],[1,0,1],[1,1,1]$ były liniowo niezależne. Ile rozwiązań ma to zadanie?

11.14 Czy wektory $[1,3,5],[2,7,5],[1,1,9]$ generują przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^3$?
A wektory $[1,4,5],[3,2,1],[5,5,4]$?

11.15 Dla jakiej liczby zespolonej $c\in\mathbb{C}$ wektor $[1,i,i]$ jest kombinacją liniową wektorów $[c,-1+i,1+i]$ oraz $[i,-1,-c]$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$?

11.16* Czy w Z_5^3 zachodzi równość $W_1=W_2$?
a) $W_1=L([1,3,2],[4,4,3])$, $\quad W_2=L([2,2,1],[4,1,0])$,
b) $W_1=L([1,2,4],[4,3,2])$,
$W_2=L([1,0,2],[1,2,2],[3,1,3])$.

11.16 Sprawdzić, że każda dla dolnego wektora $[x_1,x_2,x_3,x_4]\in\mathcal{L}([i,1,-i,-1],[i,-i,-1,1],[1,0,0,-1])$ zachodzi $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, a nie dla każdego zachodzi $|x_4|\leqslant 2$.

11.17 Niech V będzie przestrzenią wektorową, $A,B\subset V$, W- podprzestrzeń V. Dowieść, że:
a) $A\subset\mathcal{L}(A)$,
b) $A\subset W\Rightarrow\mathcal{L}(A)\subset W$,
c) $\mathcal{L}(W)=W$,
d) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A))=\mathcal{L}(A)$,
e) $A\subset B\Rightarrow\mathcal{L}(A)\subset\mathcal{L}(B)$.