ALzG 12 Bazy przestrzeni wektorowych

12.1. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni $\mathcal{L}(u_1, \dots u_k)$ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$, gdy

a) $u_1 = [5, 2, -3, 1], u_2 = [4, 1, -2, 3], u_3 = [1, 1, -1, 2], u_4 = [3, 4, -1, 2]$.

b) $u_1 = [1, 2, 3, -4], u_2 = [2, 3, -4, 1], u_3 = [2, -5, 8, -3], u_4 = [5, 26, -9, -12], u_5 = [3, -4, 1, 2]$.

12.2. Podany układ wektorów rozszerzyć do bazy całej przestrzeni a) $\{[1, 1, 1, 1]^T, [1, 2, 1, 2]^T\}$,
b) $\{[1, 1, 2, 1, 1]^T, [1, 2, 3, 1, 1]^T, [1, 2, 4, 2, 1]^T\}$

(L) 12.3. Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni rozwiązań układów równań liniowych w $\mathbb{R}^n$.

a) $9x + 12y + 2z = 0,\ 5x + 6y + 4z = 0,\ 2x + 3y - z = 0$,

b) $7x + 3y + 5z + 2t + 8u = 0,\ 3x + y + z - 4t + 6u = 0,\ 2x + y + 2z + 3t + u = 0$.

12.4. Znaleźć bazę przestrzeni wielomianów co najwyżej 2-go stopnia spełniających warunek

a) $w(1) = w(2)$,

b) $w(1) = w(-1)$,

c) $w(1) = w(0) = w(-1)$.

Rozszerzyć znalezioną bazę do bazy przestrzeni wszystkich wielomianów co najwyżej 3-go stopnia.

12.5. Niech W_1, W_2 będą następującymi podprzestrzeniami w $\mathbb{R}^5$.

$$W_1 = \mathcal{L}((10, 3, 9 + s, 1, 2 - s),\ (4, 1, 6, 1, 1),\ (2, 1, -1, -1, -2)),$$

W_2 jest przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$3x_1 - 11x_2 + tx_3 - 8x_4 + x_5 = 0, \quad 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \quad x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 + x_5 = 0.$$

Znaleźć $dimW_1$ oraz $dimW_2$ w zależności od $s, t \in \mathbb{R}$. Znaleźć wszystkie takie s, t dla których $W_1 = W_2$.

12.6. Znaleźć bazę podprzestrzeni a)$\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$. b) macierzy 2×2 trójkątnych górnych c) macierzy 3×3 diagonalnych. Znalezioną bazę rozszerzyć do bazy całej przestrzeni.

12.7. Niech $V \subset \mathbb{R}^5$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 + x_4 = 0$, a $U \subset \mathbb{R}^5$ przestrzenią rozwiązań układu $x_1 + x_3 + x_5 = 0$, $x_1 + x_2 + x_4 = 0$. Znaleźć bazy V, U,$V \cap U$. (Wskazówka: zadanie jest prostsze niż się wydaje).

12.8. Dane są dwa układy wektorów $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ oraz $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$. Wektory $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$ zestawiono w macierze i doprowadzono do postaci wierszowo zredukowanej. Na jej podstawie wyznaczyć bazę $\mathcal{L}(\mathcal{U})$, $\mathcal{L}(\mathcal{W})$, $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{W})$.

a)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(L) 12.9. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V nad $\mathbb{R}$, $U = \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $W = \mathcal{L}(\mathcal{W})$.

1) W układzie $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ znaleźć bazę podprzestrzeni $\mathcal{L}(\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$

2) Znaleźć układy $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ takie, że $\mathcal{A}_0$ jest bazą $U \cap W$, $\mathcal{A}_0|\mathcal{A}_1$ bazą U, $\mathcal{A}_0|\mathcal{A}_2$ bazą W,

3) Rozszerzyć bazę $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ do bazy całej przestrzeni.

a) $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, b) $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$,

c) $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ -6 & -7 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$, d) $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

e) $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, f) $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

g) $U = \{(x_1, x_2, 2x_1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$,

h) $U = \{(x_1, x_2, 2x_1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(x_1, 0, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$,

i) $U = \{(x_1, x_2, x_1 - x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(x_1, 2x_1, -x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$.

12.10 Ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 20\}$ wybrano liczby $n_1, \ldots, n_9$. Pokazać, ze istnieją liczby cakowite $a_1, \ldots, a_9$ nie wszystkie równe zero takie, że $n_1^{a_1} \ldots n_9^{a_9} = 1$.

12.11 Znależć bazę i wymiar przestrzeni ciągów (x_n) spełniajacych warunek $x_{i+1} = x_{i-1} + x_i$ dla $i > 2$. Czy istnieje baza tej przestrzeni złożona z ciągów geometrycznych? Jeśli tak to jaka? Znaleźć wspórzędne ciągu Fibonaciego w znalezionych bazach.