ALzG 13 Przekształcenia Liniowe

13.1 Czy podane przekształcenie jest liniowe?

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $F(x, y, z) = (2x - 2y, z - x, y - x)$,

b) $F : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ $(F(w))(x) = \frac{d^2}{dx^2}((x^2 - x - 1)w(x))$,

c) Niech $C_2(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią liniową funkcji rzeczywistych mających drugą pochodną ciągłą na $\mathbb{R}$. $F : C_2(\mathbb{R}) \to C_2(\mathbb{R})$ $F(f) = af'' + bf' + cf$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$,

d) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$,

e) $A \in M_n^n(\mathbb{K})$, $F : M_n^n(\mathbb{K}) \to M_n^n(\mathbb{K})$, $F(X) = X \cdot A + A \cdot X$.

13.2 Niech $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $F(z) = \bar{z}$. Pokazać, że

a) F jest przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

b) F nie jest przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}$ nad ciałem $\mathbb{C}$.

13.3 Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem stałym $\forall v \in \mathbb{R}^n F(v) = a$, $a \in \mathbb{R}^n$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}^n$ F jest przekształceniem liniowym.

13.4 Wykazać, że jeśli $F : V \to V$ jest przekształceniem liniowym to $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ $(\mathbf{0} \in V)$.

13.5 Znaleźć macierz przekształcenia liniowego w bazach kanonicznych:

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $F(x, y, z) = (2x - y, 3x + y - z)$,

b) $O_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ obrót o kąt α wokół punktu $(0, 0)$,

c) $S_x = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ symetria względem osi OX,

d) $O_{\alpha,z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obrót o kąt α wokół osi OZ,

e) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ symetria względem prostej $y = -x$

f) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ F obrót o kąt $\frac{2}{3}\pi$ wokół prostej $x = y = z$.

g) $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ $(F(w))(x) = w'(1)x + w(2)(x^2 + x)$ oraz w bazie $(x - 1, x^2 + 1, x^2)$,

h) $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ $(F(w))(x) = ((x^2 + x)w'(x))'$ oraz w bazie $(x + 1, x, x^2 - 1)$.

13.6 Znaleźć jądro i obraz przekształceń liniowych

a) $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z, s, t) = (x+2y+z-3s+4t, 2x+5y+4z-5s+5t, x+4y+5z-s-2t)$,

b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$,

c) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, d) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, e) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$,

f) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, g) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, h) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

13.7 Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $F : M_2^2(\mathbb{R}) \to M_2^2(\mathbb{R})$, $F(X) = X \cdot A - A \cdot X$. Znaleźć bazy i wymiary $\ker F$ i $\mathrm{Im}F$.

13.8 Znaleźć przekształcenie liniowe F w bazie kanonicznej takie, że:

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Im}F = \mathcal{L}(\mathcal{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix})$, b) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\ker F = \mathcal{L}(\mathcal{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix})$.

13.9 Pokazać, że jeśli $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ i $\mathrm{Im}F = \mathcal{L}(\mathcal{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix})$ to F jest różnowartościowe.

13.10 Niech F będzie operator na V takim, że $\dim \mathrm{Im}F = \dim \mathrm{Im}F^2$. Pokazać, że $\ker F \cap \mathrm{Im}F = \{0\}$.

13.11 Pokazać, że jeśli $F, G \in Hom(V, U)$ to $\dim \mathrm{Im}(F + G) \leqslant \dim \mathrm{Im}F + \dim \mathrm{Im}G$.