ALzG 14 Przekształcenia liniowe, rzuty i suma prosta

14.1 Niech V będzie przestrzenią wektorową o skończonym wymiarze nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $F : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Pokazać, że jeśli dla każdego przekształcenia liniowego $G : V \to V$ zachodzi $F \circ G = G \circ F$, to istnieje skalar $k \in \mathbb{K}$ taki, że $F(v) = k \cdot v$ dla każdego $v \in V$.

14.2 Niech V będzie przestrzenią wektorową o skończonym wymiarze nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $F : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym odwracalnym. Pokazać, że istnieje wielomian $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ nad ciałem $\mathbb{K}$ dla którego $F^{-1} = p(F)$.

14.3 Niech $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą V oraz $U = \mathcal{L}\left(\mathcal{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$, $W = \mathcal{L}\left(\mathcal{B} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$.
Pokazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Znaleźć rzut wektora $v = \mathcal{B} \cdot [4\ 2\ 4\ 4]^T$ na podprzestrzeń U równolegle do W.

14.4 Niech $W = \mathcal{L}([1\ 2\ 1\ \ -2]^T, [2\ 3\ 1\ 0]^T)$, $U = \mathcal{L}([1\ 2\ 2\ \ -3\ ]^T, [1\ 1\ 1\ 0]^T)$. Sprawdzić, że $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$ oraz znaleźć rzut $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ na podprzestrzeń U wzdłuż W.

14.5 Operator liniowy F na przestrzeni V ma w bazie $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.
Znaleźć bazę Ker$F$ i ImF. Czy istnieje rzut $P : V \to V$ taki, że Ker$P$ = Ker$F$ i ImP = ImF?
Jeśli istnieje to znaleźć takie P.

14.6 Niech $V = \mathbb{R}_2[x]$, $U = \mathcal{L}(x - 1, x^2 - 1)$, $W = \mathcal{L}(x^2)$. Znaleźć rzut na U wzdłuż W, jeśli istnieje.

14.7 Niech $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$ oraz $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$. Wykazać, że $\mathbb{R}^n = U \oplus W$ oraz wyznaczyć rzuty wektorów jednostkowych na podprzestrzeń U równolegle do W i na podprzestrzeń W równolegle do U.

14.8 Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową nad nieskończonym ciałem $\mathbb{K}$. Udowodnić, że jeśli $S_1, \ldots, S_k$ są podprzestrzeniami V o takim samym wymiarze, to istnieje podprzestrzeń T przestrzeni V dla której:

$$V = S_i \oplus T \text{ dla } i = 1, \ldots, k.$$

14.9 W przestrzeni macierzy $M_n^n(\mathbb{R})$, która jest sumą prostą podprzestrzeni macierzy symetrycznych i podprzestrzenie macierzy antysymetrycznych, wyznaczyć rzut macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ na każdą z tych podprzestrzeni równolegle do drugiej z nich.

14.10 Niech $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Niech $V_p, V_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ będzie zbiorem funkcji parzystych, nieparzystych odpowiednio. Wykazać, że V_p, V_n są podprzestrzeniami liniowymi V oraz $V = V_p \oplus V_n$.

14.11 W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są dwa podzbiory $A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = x_1 + x_2\}$ oraz $B = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$. Wykazać, że A i B są podprzestrzeniami $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

14.12 Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{U} = \mathcal{B}A$, $\mathcal{W} = \mathcal{B}B$, $U = \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $W = \mathcal{L}(\mathcal{W})$. Wykazać, ze $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Znaleźć rozkład wektora $\mathcal{B} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ względem tej sumy. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 11 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

14.13 Niech $V_1 = \mathcal{L}(e_1, e_1 + e_2)$, $V_2 = \mathcal{L}(e_2 + e_3, e_4)$, $V_3 = \mathcal{L}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_3)$, gdzie e_1, e_2, e_3, e_4 wektory bazy kanonicznej $\mathbb{R}^4$. Udowodnić, że $V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3 = V_2 \oplus V_3$.

14.14 Niech $U, V < \mathbb{R}^3$ gdzie $U = \{(x_1, .., x_n) : x_1 + ... + x_n = 0\}$, $V = \{(x_1, .., x_n) : x_1 = .. = x_n\}$. Udowodnić, że $\mathbb{R}^n = U \oplus V$. Znaleźć rozkłady wektorów z bazy kanonicznej względem tej sumy.

14.15 Niech $V = M_n^n(\mathbb{K})$, $A_s = \{A \in V : A = A^T\}$, $A_{as} = \{A \in V : A = -A^T\}$. Udowodnić, że $V = A_s \oplus A_{as}$.

14.16 Niech $V = M_n^n(\mathbb{K})$, $U = \{A = [a_{ij}] \in V : a_{ij} = 0 \text{ dla } i < j\}$, $W = \{A = [a_{ij}] \in V : a_{ij} = 0 \text{ dla } i > j\}$. Czy $V = U + W$? Czy $U + W$ jest sumą prostą?

14.17 Niech V będzie zbiorem funkcji ciągłych określonych na $< -1, 1 >$ o wartościach rzeczywistych, $V_1 = \{f \in V : f(< -1, 0 >) = \{0\}\}$, $V_2 = \{f \in V : f(< 0, 1 >) = \{0\}\}$, $V_3 = \{ax + a : a \in \mathbb{R}\}$. Pokazać, że $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

14.18 Niech V przestrzeń wielomianów zmiennej rzeczywistej stopnia co najwyżej 3. $V_1 = \{w(x) \in V : w(1) = 0\}$, $V_2 = \{w(x) \in V : w(-1) = 0\}$. Znaleźć $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$, czy jest to suma prosta? Znaleźć bazy V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$.

14.19 Niech V_1, V_2, V_3 będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{K}$. Udowodnić, że:

a) $(V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3) \subset V_1 \cap (V_2 + V_3)$

b) Jeśli $V_3 \subset V_1$ to $V_1 \cap (V_2 + V_3) = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$

c) Jeśli $V_2 \subset V_3$ to $V_2 + (V_3 \cap V_1) = (V_2 + V_3) \cap (V_2 + V_1)$.

Pokazać, że w podpunkcie a) nie zawsze zachodzi równość.