ALzG 15 Wartości własne

15.1 Niech $A \in M_n^n(\mathbb{C})$ taka, że $A^r = I_n$. Pokazać, że jeśli λ jest wartością własną A to $\lambda^r = 1$.

15.2 Znając wartości własne i wektory własne macierzy $A \in M_n^n(\mathbb{K})$, znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy a) A^2, b) A^3, c) $A^2 + 2A + I$, d) $f(A)$, $f \in \mathbb{K}[x]$.

15.3 Udowodnić, że macierz $A \in M_n^n(\mathbb{K})$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A są niezerowe.

15.4 Udowodnić, że jeśli $A, B \in M_n^n(\mathbb{K})$ to macierze AB i BA mają te same wartości własne.

15.5 Pokazać, że macierze A i A^{T} mają jednakowe wielomiany charakterystyczne.

15.6 Udowodnić, że jeśli $\chi_A(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + (-1)^n a_n$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy $A = [a_{ij}]_n^n$ to
a) $a_1 = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, b) $a_n = \det A$.

15.7 Wykazać, że jeśli operator liniowy F na przestrzeni wektorowej V jest odwracalny to operatory F i F^{-1} mają te same wektory własne. Jaki jest związek między wartościami własnymi obu operatorów?

15.7 Niech F, G operatory na przestrzeni wektorowej V, takie że $FG = GF$. Pokazać, że jeśli v jest wektorem własnym F odpowiadającym wartości własnej λ to $G(v)$ jest też wektorem własnym F odpowiadającym λ.

15.8 Wyznaczyć wartości własne oraz podprzestrzenie własne operatorów liniowych mających w pewnej bazie przestrzeni wektorowej dane macierze (rozważyć przypadki gdy przestrzeń wektorowa jest nad ciałem $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$)
a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,
c) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

15.9 Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie niezmiennicze przekształcenia liniowego F : a) $F \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$,
$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 + x_3, x_2 - x_3)$,
b) $F \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$,
$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2, -2x_1 + x_2 - 2x_{3,} - 2x_2)$,
c) $F \in \mathrm{Hom}(R_{\mathrm{n}}[x], R_{\mathrm{n}}[x])$, $F(f) = \frac{d}{dx}(f)$.
d) $F \in \mathrm{Hom}(R_3[x], R_3[x])$, $F(f) = \frac{d}{dx}((x+3) \cdot f)$.

15.10 Niech $F : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $(F(f))(x) = f(ax + b)$, gdzie $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$. Znaleźć wartości własne operatora F.

15.11 Znaleźć wszystkie podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ niezmiennicze względem operatora liniowego zadanego w bazie kanonicznej macierzą

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

15.12 Niech $A = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Znaleźć wielomian charakterystyczny macierzy A.

15.13 Obliczyć $f(A)$, gdy:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $f(x) = (2x^5 - 2x^3 + 7)(x^2 - 5x + 10) + x + 5,\ A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $f(x) = 5x^6 - x^4 + 2x^2 - 3x + 2,\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$