ALzG 16 Diagonalizacja

16.1 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2, -2x_1 + x_2 - 2x_3, -2x_2)$. Czy operator φ jest diagonizowalny? Znaleźć bazę $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych φ i macierz φ w tej bazie.

16.2 Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$, $F \in \mathrm{Hom}(V, V)$, $\mathcal{B}$ baza V, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = A$. Czy operator F jest diagonizowalny? Jeśli tak to znaleźć bazę $\mathcal{C}$ i macierz diagonalną $D = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 3 & i & 0 & 0 \\ i & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

16.3. Dla danej macierzy A znaleźć, o ile istnieje, macierz odwracalną B i diagonalną C taką, że $C = B^{-1}AB$.

a) $\begin{bmatrix} 3i & -2+2i \\ 2+2i & i \end{bmatrix} \in M_2^2(\mathbb{C})$, b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_3^3(\mathbb{R})$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3^3(\mathbb{R})$,

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4^4(\mathbb{R})$, e) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

16.4 Udowodnić, że operator F na przestrzeni V jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych F.

16.5 Niech $F \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $F(4,1) = (-12, 3)$, $F(-1, 1) = (-3, 3)$. Obliczyć $F^{100}(0, 1)$.

16.6 Udowodnić, że wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

16.7 Udowodnić, że jeśli operator F ma w n-wymiarowej przestrzeni wektorowej ma n różnych wartości własnych to jest diagonizowalny.

16.8 Niech F będzie operatorem na n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V mającym n różnych wartości własnych. G operator na V, taki, że $F \circ G = G \circ F$. Udowodnić, że operator G jest diagonizowalny.