ALzG 18 Forma Hermitowska

18.1 Niech $g : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ będzie dane wzorem: $g(x,y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_1 + x_1\bar{y}_2 + x_2 y_2 + i x_2\bar{y}_3 - i x_3\bar{y}_2$.

a) Obliczyć $g(\mathcal{B},\mathcal{B})$, gdzie $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$,

b) Znaleźć g-ortogonalną bazę $\mathbb{C}^3$ i macierz formy g w tej bazie.

18.2 Niech $g(\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $V\mathcal{L}(\mathcal{B})$,

a) znaleźć bazy $U^\perp$ i $U + U^\perp$,

b) znaleźć ortogonalną bazę U i rozszerzyć ją, o ile to możliwe, do bazy ortogonalnej przestrzeni V.

18.3 Niech $g(\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $V\mathcal{L}(\mathcal{B})$,

a) znaleźć bazę ortogonalną V i macierz Grama otrzymanej bazy,

b) znaleźć rzut ortogonalny wektora $v = \mathcal{B} \cdot [1\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$ na podprzestrzeń U.

18.4 Daną formę kwadratową sprowadzić do postaci kanonicznej, znaleźć bazę w której ma postać kanoniczną, zbadać określoność formy.

a) $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 7x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 6x_2x_4 + 4x_3x_4$,

b) $f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3$,

c) $f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$,

d) $f(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

e) $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$,

18.5 Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ forma kwadratowa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = -x_1^2 + rx_2^2 + rx_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$ jest ujemnie określona?