ALzG 9 Geometria Analityczna

Płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$ równanie ogólne:
$\pi : A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, gdzie $[A,B,C]\perp\pi$, a $(x_0,y_0,z_0)\in\pi$.

Prosta w $\mathbb{R}^3$:

równanie parametryczne: $l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ gdzie punkt $(x_0,y_0,z_0)\in l$, a wektor $[a,b,c]\| l$

równanie krawędziowe: $l : \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ gdzie $[A_1,B_1,C_1]\times[A_2,B_2,C_2]\neq 0$

równanie kierunkowe $l : \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ gdzie $(x_0,y_0,z_0)\in l$, $[a,b,c]\| l$

Odległość punktu $P=(x_0,y_0,z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ wyraża się wzorem

$$dist(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

9.1 Znaleźć równanie płaszczyzny π:
a) przechodzącej przez punkt $P=(1,5,1)$ i równoległej do wektorów $u_1=[-2,1,3]$ i $u_2=[1,4,-1]$,
b) przechodzącej przez punkt $P=(2,4,-1)$ i równoległej do płaszczyzny $2x-y-3z-1=0$,
c) przechodzącej przez punkt $P=(3,5,7)$ i prostopadłej do płaszczyzn $x-y+2z=1$ i $3x+y-z=-2$.

9.2 Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $P=(2,3,1)$ oraz
a) prostopadłej do płaszczyzny $5x-3y+2z-1=0$,
b) prostopadłej do prostych $l_1 : : \begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$ i $l_2 : \begin{cases} x=3t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}$,
c) prostopadłej do prostej $l_1 : \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$ i przecinającą prostą $l_2 : x=y=z$.

9.3 Znaleźć równanie płaszczyzny zawierające proste $l_1 : \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-2}$ oraz $l_2 : \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

9.4 Czy przez proste $l_1 : \begin{cases} 2x+3y-z-1=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$ i $l_2 : \begin{cases} x+5y+4z-3=0 \\ x+2y+2z-1=0 \end{cases}$ można poprowadzić płaszczyznę ?

9.5 Znaleźć rzut prostopadły punktu $P=(1,2,-2)$ na płaszczyznę $\pi : x-2y+3z=0$.

9.6 Znaleźć punkt symetryczny do $P=(1,1,0)$ względem płaszczyzny $\pi : x+2y-z=0$.

9.7 Znaleźć rzut punktu $P=(3,5,4)$ na prostą $l : x=-2t+1,\ y=t,\ z=5$.

9.8 Znaleźć punkt symetryczny do $P=(1,2,-2)$ względem prostej $l : x=t,\ y=2t-3,\ z=-t+2$.

9.9 Znaleźć rzut prostej $l:\ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ na płaszczyznę $\pi:\ x+y+z=0$.

9.10 Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $(1,1,-2)$, prostopadłej do wektora $[-1,3,4]$ i przecinającej prostą $l:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z}{3}$.

9.11 Znaleźć równanie prostej przecinającej prostopadle proste $l_1:\ x=1+t,\ y=-1-2t,\ z=3-t$ oraz $l_2:\ x+4y-z=0,\ -2y+z+1=0$.

9.12 Zbadać wzajemne położenie prostej l i płaszczyzny π

a) $l:\ \begin{cases} x=2_t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases}$, $\pi:\ x+2y-1=0$ b) $l:\ \begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$, $\pi:\ x+z-3=0$

c) $l:\ \begin{cases} x-y+z+2=0 \\ x+y-z-3=0 \end{cases}$, $\pi:\ x-1=0$ d) $l:\ \begin{cases} x+y+2z-1=0 \\ x+y-2z+3=0 \end{cases}$, $\pi:\ x+y+1=0$

9.13 Znaleźć równania płaszczyzn równoległych, na których leżą proste:

l_1: $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ l_2: $\begin{cases} x+1=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$

9.14 Znaleźć równanie prostej równoległej do płaszczyzn: $H_1:\ 3x+12y-3z-5=0$ i $H_2:\ 3x-4y+9z+7=0$ oraz przecinające proste: $l_1:\ \frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-2}{2}$ i $l_2:\ x=3-2t,\ y=-1+3t,\ z=2+4t$.

9.15 Znaleźć odległość między prostymi:

a) $l_1:\ \frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ i $l_2:\ \frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$

b) $l_1:\ \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ i $l_2:\ \begin{cases} x+y-z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$

9.16 Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $P=(2,3,1)$ oraz przecinającej proste:

$l_1:\ \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z+4=0 \end{cases}$ i $l_2:\ \begin{cases} x+3y-1=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

9.17 Przez rzut punktu $A=(-2,1,1)$ na prostą $l_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ poprowadzić prostą prostopadłą do l_1 i przecinającą prostą $l_2:\ \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases}$

9.18 Zbadać wzajemne położenie prostych:

a) $l_1:\ \begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ 3x-y+z+1=0 \end{cases}$ i $l_2:\ \begin{cases} 2x+3y-2z-1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$

b) $l_1:\ x=3t+7,\ y=2t+2,\ z=-2t+1$ i $l_2:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$.

c) $l_1: x=t+2,\ y=2t+1,\ z=-2t$ i $l_2:\ x=-\frac{1}{2}t+3,\ y=-t+3,\ z=t-2$.

9.19 Znaleźć równanie dwusiecznych kątów jakie tworzą między sobą proste:

$l_1:\ x=0,\ y=1+3t,\ z=1-4t$ i $l_2:\ x=6t,\ y=1,\ z=1+8t$.