

1.(3pkt) Niech $x \circ y = \min(x, y)$ dla $x, y \in [0, 1]$. Czy \circ jest działaniem łącznym? Czy istnieje element neutralny tego działania w zbiorze $[0, 1]$? Czy $([0, 1], \circ)$ jest grupą?

2.(2pkt) Dla permutacji $\pi = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 487365192 \end{pmatrix}$ i $\sigma = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 168429573 \end{pmatrix}$. Znaleźć $\pi \circ \sigma$, π^{99} , σ^{-1} , znak π .

3.(3pkt) Obliczyć, o ile to możliwe $(B^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot C + A^{-1} \cdot D$ dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4.(4pkt) Rozwiązać układ równań w zależności od parametru a .

$$x + 2z + 2y = 2$$

$$x + y + az = 3$$

$$-2x + ay + az = -9$$

5.(3pkt) Nie korzystając z reguły Sarrusa dla macierzy 3 na 3 obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a \\ x & 0 & a & 0 \end{vmatrix}$$

6.(3pkt) Niech permutacja σ będzie pojedynczym cyklem, niech macierz A o wymiarach n na n będzie zdefiniowana przez $A(i, j) = \sigma^{i-1}(j)$. Jakiej długości cyklem jest σ jeśli $\det A \neq 0$. Odpowiedź uzasadnić (Wsk.: narysować dany wyznacznik i pomyśleć; zadanie jest prostsze niż się wydaje).

1.(3pkt) Niech $x \circ y = \max(x, y)$ dla $x, y \in \mathbb{N}$. Czy \circ jest działaniem łącznym? Czy istnieje element neutralny tego działania w zbiorze \mathbb{N} ? Czy (\mathbb{N}, \circ) jest grupą?

2.(2pkt) Dla permutacji $\pi = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 391687425 \end{pmatrix}$ i $\sigma = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 586432179 \end{pmatrix}$. Znaleźć $\pi \circ \sigma, \pi^{99}, \sigma^{-1}$, znak π .

3.(3pkt) Obliczyć, o ile to możliwe $C \cdot (A \cdot B^{-1})^{-1} + D \cdot A^{-1}$ dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.(4pkt) Rozwiązać układ równań w zależności od parametru a .

$$x + y + z = 1$$

$$x + 2y + az = 2$$

$$x + ay + 2z = 0$$

5.(3pkt) Nie korzystając z reguły Sarrusa dla macierzy 3 na 3 obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & a \\ 0 & a & x & 0 \end{vmatrix}$$

6.(3pkt) Niech permutacja σ będzie złożeniem dwóch rozłącznych cykli o długościach odpowiednio p i q , ($p, q < n$), niech macierz A o wymiarach n na n będzie zdefiniowana przez $A(i, j) = \sigma^{i-1}(j)$. Wykazać, że $p \cdot q \geq n$ jeśli $\det A \neq 0$. (Wsk.: narysować dany wyznacznik i pomyśleć; zadanie jest prostsze niż się wydaje).