K3 ALzG O4 19.04.2004 10:15 A

1. Rozważmy przestrzeń funkcji z przedziału $(0,1)$ w zbiór $\mathbb{R}$. Dla jakich $k \in \mathbb{N}$ układ wektorów $(1, x, x^2, \ldots, x^k, \frac{1-x^4}{1+x})$ jest liniowo niezależny? Odpowiedź uzasadnić.

2. Czy przekształcenie $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dane wzorem $\phi(w(x)) = ((2x+1) \cdot w(x) - x^2 \cdot w'(x))'$ jest przekształceniem liniowym. Jeśli tak to podać macierz przekształcenia ϕ w bazie kanonicznej $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ oraz znaleźć bazy Kerϕ i Imϕ.

3. Znaleźć bazę $U \cap W$. Rozszerzyć ją do bazy U, następnie do bazy $U + W$, a następnie do bazy całej przestrzeni. $U = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}), W = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$.

4. Znaleźć przekształcenia ψ_2 oraz ψ_2 takie, że $\mathcal{L}([1\ 2\ 0\ 1]^T, [1\ 1\ 1\ 1]^T) = \text{Ker}\psi_1 \cap \text{Ker}\psi_2$. Czy przekształcenia ψ_1, ψ_2 są wyznaczone jednoznacznie ?

5. Niech V_1, V_2, U będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V takimi, że $V = V_1 \oplus V_2$, $\dim U = k$, $V_1 + U$, $V_2 + U$ są sumami prostymi. Wyznaczyć $\dim((V_1 \oplus U) \cap (V_2 \oplus U))$.

K3 ALzG O4 19.04.2004 10:15

1. Rozważmy przestrzeń funkcji z przedziału $(0,1)$ w zbiór $\mathbb{R}$. Dla jakich $k \in \mathbb{N}$ układ wektorów $(1, x, x^2, \ldots, x^k, \frac{1-x^5}{1-x})$ jest liniowo niezależny? Odpowiedź uzasadnić.

2. Czy przekształcenie $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dane wzorem $\phi(w(x)) = (2x \cdot w(x) - (x^2+1) \cdot w'(x))'$ jest przekształceniem liniowym. Jeśli tak to podać macierz przekształcenia ϕ w bazie kanonicznej $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ oraz znaleźć bazy Kerϕ i Imϕ.

3. Znaleźć bazę $U \cap W$. Rozszerzyć ją do bazy U, następnie do bazy $U + W$, a następnie do bazy całej przestrzeni. $U = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}), W = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$.

4. Znaleźć przekształcenia ψ_2 oraz ψ_2 takie, że $\mathcal{L}([-1\ 2\ 1\ 0]^T, [1\ 1\ 1\ 1]^T) = \text{Ker}\psi_1 \cap \text{Ker}\psi_2$. Czy przekształcenia ψ_1, ψ_2 są wyznaczone jednoznacznie ?

5. Niech V_1, V_2, U będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V takimi, że $V = V_1 \oplus V_2$, $\dim U = k$, $U + V_1$ jest suma prostą. Wyznaczyć $\dim((U \oplus V_1) \cap V_2))$.