1. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni $V$ nad $\mathbb{R}$, $U = \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $W = \mathcal{L}(\mathcal{W})$.

a) W układzie $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ znaleźć bazę podprzestrzeni $\mathcal{L}(\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$

b) Znaleźć układy $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ takie, że $\mathcal{A}_0$ jest bazą $U \cap W$, $\mathcal{A}_0|\mathcal{A}_1$ bazą $U$, $\mathcal{A}_0|\mathcal{A}_2$ bazą $W$,

c) Rozszerzyć bazę $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ do bazy całej przestrzeni.

d) Czy $U + W$ jest sumą prostą?

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \; M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

2. Niech $A = \{z \in \mathbb{C} : z = -i \cdot \bar{z}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z \cdot (2+i)) = 1\}$. Wykazać, że $A$ i $B$ są podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{C}$. Czy $\mathbb{C} = A \oplus B$?

3. Niech $V$ będzie przestrzenią liniową o skończonym wymiarze, $F : V \to V$ przekształceniem liniowym takim, że $\forall_{v \in V} \exists_{k \in \mathbb{N}^+} F^k = 0$. Wykazać, że $F$ nie jest przekształceniem różnowartościowym.

4. Znaleźć bazę jądra i obrazu przekształcenia $F$ gdzie $F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$.

1. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni $V$ nad $\mathbb{R}$, $U = \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $W = \mathcal{L}(\mathcal{W})$.

a) W układzie $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ znaleźć bazę podprzestrzeni $\mathcal{L}(\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$

b) Znaleźć układy $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ takie, że $\mathcal{A}_0$ jest bazą $U \cap W$, $\mathcal{A}_0|\mathcal{A}_1$ bazą $U$, $\mathcal{A}_0|\mathcal{A}_2$ bazą $W$,

c) Rozszerzyć bazę $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ do bazy całej przestrzeni.

d) Czy $U + W$ jest sumą prostą?

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ -5 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

2. Niech $A = \{z \in \mathbb{C} : z = i \cdot \bar{z}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z \cdot (1+2i)) = 1\}$. Wykazać, że $A$ i $B$ są podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{C}$. Czy $\mathbb{C} = A \oplus B$?

3. Niech $V$ będzie przestrzenią liniową o skończonym wymiarze, $F : V \to V$ przekształceniem liniowym takim, że $\forall_{v \in V} \exists_{k \in \mathbb{N}^+} F^k = v$. Wykazać, że $F$ jest przekształceniem różnowartościowym.

4. Znaleźć bazę jądra i obrazu przekształcenia $F$ gdzie $F(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot A$.