1. Niech $V = \mathbb{R}_3[x]$ oznacza przestrzeń wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia co najwyżej 3.
Niech $V_1 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a + b + c + d = 0\}$, $V_2 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a = b = c = d\}$,
$V_3 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a = c = 0\}$, $V_4 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : b = d = 0\}$.
Wykazać, że V_1, V_2, V_3 są podprzestrzeniami V. Znaleźć ich bazy. Czy a) $V = V_1 + V_2$, b) $V = V_1 + V_3$ c) $V = V_2 + V_3$, d) $V = V_3 + V_4$? W przypadkach gdy równość zachodzi napisać czy jest to suma prosta. Odpowiedź uzasadnić.

2.Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V nad $\mathbb{R}$, $U = \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $W = \mathcal{L}(\mathcal{W})$. Znaleźć bazę $U \cap W$, następnie rozszerzyć ją do bazy $U + W$.

a) $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Dane są proste $k : x + 2y - 1 = 0, 3x + 2z - 5 = 0$ i $l : \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+3}{-2}$. Znaleźć punkty $P_l \in l$ i $P_k \in k$ takie, że wektor $\overrightarrow{P_kP_l}$ jest prostopadły do obydwu danych prostych.

1. Niech $V = \mathbb{R}_3[x]$ oznacza przestrzeń wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia co najwyżej 3.
Niech $V_1 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a + b + c + d = 0\}$, $V_2 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a = b = c = d\}$,
$V_3 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a = c = 0\}$, $V_4 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : b = d = 0\}$.
Wykazać, że V_1, V_2, V_3 są podprzestrzeniami V. Znaleźć ich bazy. Czy a) $V = V_1 + V_2$, b) $V = V_1 + V_3$ c) $V = V_2 + V_3$, d) $V = V_3 + V_4$? W przypadkach gdy równość zachodzi napisać czy jest to suma prosta. Odpowiedź uzasadnić.

2.Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V nad $\mathbb{R}$, $U = \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $W = \mathcal{L}(\mathcal{W})$. Znaleźć bazę $U \cap W$, następnie rozszerzyć ją do bazy $U + W$.

a) $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Dane są proste $k : x + 2y - 1 = 0, 3x + 2z - 5 = 0$ i $l : \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+3}{-2}$. Znaleźć punkty $P_l \in l$ i $P_k \in k$ takie, że wektor $\overrightarrow{P_kP_l}$ jest prostopadły do obydwu danych prostych.

1. Niech $V = \mathbb{R}_3[x]$ oznacza przestrzeń wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia co najwyżej 3.
Niech $V_1 = \{w(x) \in \mathbb{R}_3[x] : w(1) = 0, w(-1) = 0\}$, $V_1 = \{w(x) \in \mathbb{R}_3[x] : w(1) = w(0) = w(-1)\}$, $V_3 = \{w(x) \in \mathbb{R}_3[x] : w(0) = 0\}$, $V_4 = \{a + 2ax + 3ax^2 + 4ax^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a \in \mathbb{R}\}$.
Wykazać, że V_1, V_2, V_3, V_4 są podprzestrzeniami V. Znaleźć ich bazy. Czy a) $V_1 + V_2$, b) $V_3 + V_4$ są sumami prostymi. Odpowiedź uzasadnić.

2.Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V nad $\mathbb{R}$, $U = \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $W = \mathcal{L}(\mathcal{W})$. Znaleźć bazę $U \cap W$, następnie rozszerzyć ją do bazy $U + W$.

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \ M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 7 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Niech prosta k przechodzi przez punkty $P = (1,2,3)$ oraz $Q = (3,2,1)$. Zaleźć płaszczyznę równoległą do prostej k zawierającą prostą $l : x + 2y - 1 = 0, 3x + 2z - 5 = 0$.

1. Niech $V = \mathbb{R}_3[x]$ oznacza przestrzeń wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia co najwyżej 3.
Niech $V_1 = \{w(x) \in \mathbb{R}_3[x] : w(1) = 0, w(-1) = 0\}$, $V_1 = \{w(x) \in \mathbb{R}_3[x] : w(1) = w(0) = w(-1)\}$, $V_3 = \{w(x) \in \mathbb{R}_3[x] : w(0) = 0\}$, $V_4 = \{a + 2ax + 3ax^2 + 4ax^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a \in \mathbb{R}\}$.
Wykazać, że V_1, V_2, V_3, V_4 są podprzestrzeniami V. Znaleźć ich bazy. Czy a) $V_1 + V_2$, b) $V_3 + V_4$ są sumami prostymi. Odpowiedź uzasadnić.

2.Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V nad $\mathbb{R}$, $U = \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $W = \mathcal{L}(\mathcal{W})$. Znaleźć bazę $U \cap W$, następnie rozszerzyć ją do bazy $U + W$.

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \ M_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 7 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Niech prosta k przechodzi przez punkty $P = (1,2,3)$ oraz $Q = (3,2,1)$. Zaleźć płaszczyznę równoległą do prostej k zawierającą prostą $l : x + 2y - 1 = 0, 3x + 2z - 5 = 0$.