

P3 K1 07.11.2004 godz. 17:00

1. (1 pkt) Podać wartość logiczną zdania. Zmienne oznaczają liczby rzeczywiste. Odpowiedź uzasadnić

$$\forall x[(\exists y x \cdot y = y) \Rightarrow \forall z z \cdot x = z]$$

2. (6 pkt) Podane zdania zapisać jako formuły rachunku zdań. Można używać symboli: $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall$, zmiennych, nawiasów oraz symboli podanych w nawiasach:

a) zmienne oznaczają liczby naturalne:

x jest pierwiastkiem liczby wymiernej ($\cdot, =$),

b) zmienne oznaczają liczby rzeczywiste:

Dla dowolnych dwóch liczb ich średnia arytmetyczna istnieje i jest między nimi ($<, =, +$),

c) zmienne oznaczają liczby rzeczywiste:

Jeśli funkcja f ma pierwiastki to istnieje wśród nich największy ($\leq, 0$).

3. (3 pkt) Udowodnić podaną równość jeśli jest prawdziwa. W przeciwnym wypadku znaleźć kontrprzykład.

$$[(D \cap A) \cup (D \setminus C)] \setminus [(A \cup B) \cap (D \cup C)] = D \setminus (A \cup B \cup C)$$

4. (3 pkt) Czy podana relacja R określona w zbiorze liczb $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ jest zwrotna, przeciwwrotna, przechodnia, symetryczna, antysymetryczna. Odpowiedź uzasadnić (czyli dowód lub kontrprzykład)

$$xRy \Leftrightarrow \sqrt{x \cdot y} \in \mathbb{N}.$$

5. (3 pkt) Wykazać, że jeśli relacja R określona na niepustym zbiorze X jest symetryczna, przechodnia i $\forall x \in X \exists y \in X xRy$ to R jest również zwrotna. Wykazać, że ostatnie założenie jest istotne (tzn opuszczenie tego założenia sprawia, że twierdzenie jest nieprawdziwe).

P3 K1 07.11.2004 godz. 17:00

1. (1 pkt) Podać wartość logiczną zdania. Zmienne oznaczają liczby rzeczywiste. Odpowiedź uzasadnić

$$\forall x[(\forall y x \cdot y \neq y) \Rightarrow \exists z z \cdot x = z]$$

2. (6 pkt) Podane zdania zapisać jako formuły rachunku zdań. Można używać symboli: $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall$, zmiennych, nawiasów oraz symboli podanych w nawiasach:

a) zmienne oznaczają liczby naturalne:

x jest pierwiastkiem liczby pierwszej ($\cdot, =$),

b) zmienne oznaczają liczby rzeczywiste:

Dla dowolnych dwóch liczb ich średnia geometryczna istnieje i jest między nimi ($<, =, \cdot$),

c) zmienne oznaczają liczby rzeczywiste:

Jeśli funkcja f ma pierwiastki to istnieje wśród nich najmniejszy ($\leq, 0$).

3. (3 pkt) Udowodnić podaną równość jeśli jest prawdziwa. W przeciwnym wypadku znaleźć kontrprzykład.

$$[(A \cap D) \cup (A \setminus C)] \setminus [(D \cup B) \cap (A \cup C)] = A \setminus (B \cup C \cup D)$$

4. (3 pkt) Czy podana relacja R określona w zbiorze liczb $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ jest zwrotna, przeciwzwrotna, przechodnia, symetryczna, antysymetryczna. Odpowiedź uzasadnić (czyli dowód lub kontrprzykład)

$$xRy \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y}} \in \mathbb{N}.$$

5. (3 pkt) Wykazać, że jeśli relacja R określona na niepustym zbiorze X jest symetryczna, antysymetryczna i $\forall x \in X \exists y \in X xRy$ to R jest relacją równości. Wykazać, że ostatnie założenie jest istotne (tzn opuszczenie tego założenia sprawia, że twierdzenie jest nieprawdziwe).