

Imię Nazwisko . . . . .

grupa C ... rz .... kol ....					
1.	2.	3.	4.	5.	$\Sigma$ .

1. (3 pkt.) Przy pomocy wyłącznie symboli logicznych, kwantyfikatorów (tylko nieograniczonych), zmiennych przebiegających zbiór a) liczb naturalnych b) liczb rzeczywistych oraz znaków podanych w nawiasach zapisać wyrażenie:

a) *Pierwiastek kwadratowy z liczby parzystej, o ile istnieje, jest liczbą parzystą.* ( $\cdot, =, +$ )

b) *Istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista odwrotna do liczby  $x$ .* ( $\cdot, =$ )

2.(2 pkt.) Dla jakich zbiorów  $X$ , jest prawdą

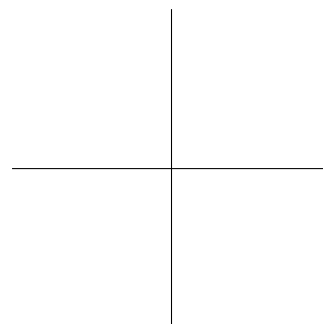
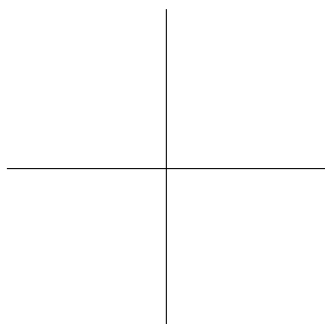
$$\emptyset \cup \{\emptyset, \{X\}\} \cup \{\{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset\}, X\} = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$$

3.(4 pkt.) Niech dla każdego  $a \in \mathbb{R}$ ,  $X_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x - a)(x + \frac{1}{a}) \wedge y \geq -1\}$ .

Zaznaczyć na wykresie oraz opisać zbiór punktów:

$$\bigcap_{a \geq 1} X_a$$

$$\bigcup_{a \geq 1} X_a$$



$$\bigcap_{a \geq 1} X_a =$$

$$\bigcup_{a \geq 1} X_a =$$

4.(3 pkt) (a) Podać interpretację symbolu  $f$ , tak aby podane zdanie było fałszywe:

$$\forall x (\sim f(x, x) \Leftrightarrow f(1, x))$$

(b) Dla jakich wartościowań formuła:  $(\sim (\sim q \Rightarrow r) \wedge p) \wedge (q \Rightarrow \sim p)$  jest prawdziwa?

Zapisać podaną formułę w postaci alternatyw koniunkcji zmiennych  $p, q, r$  lub ich zaprzeczeń.

5.(3 pkt) Stosując zasadę indukcji, udowodnić nierówność:  $2^n \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$ .

Imię Nazwisko . . . . .

grupa C ... rz .... kol ....					
1.	2.	3.	4.	5.	Σ.

1. (3 pkt.) Przy pomocy wyłącznie symboli logicznych, kwantyfikatorów (tylko nieograniczonych), zmiennych przebiegających zbiór a) liczb naturalnych b) liczb rzeczywistych oraz znaków podanych w nawiasach zapisać wyrażenie:

a) *Wszystkie liczby nieparzyste są podzielne przez  $x$ .* ( $\cdot, =, +$ )

b) *Nie każdy pierwiastek trzeciego stopnia z liczby dodatniej jest liczbą dodatnią.* ( $\cdot, >, =, 0$ )

2.(2 pkt.) Dla jakich zbiorów  $X$ , jest prawdą

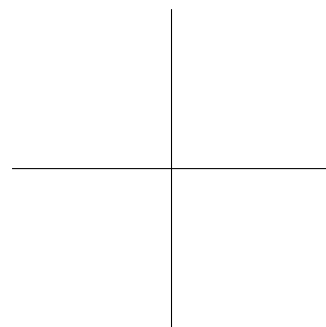
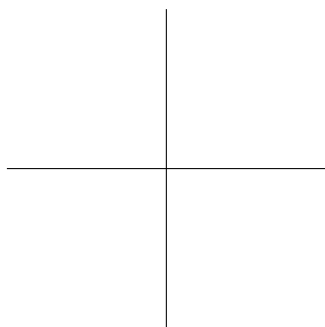
$$\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, X\}\} \cap \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, X\} \cap \{\{\emptyset\}, \{X\}, \{\{X\}\}\} = \{\{\emptyset\}, \{X\}\}$$

3.(3 pkt.) Niech dla każdego  $a \in \mathbb{R}$ ,  $X_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -(x - a)(x + \frac{1}{a}) \wedge y \leq 1\}$ .

Zaznaczyć na wykresie oraz opisać zbiór punktów:

$$\bigcap_{a \leq -1} X_a$$

$$\bigcup_{a \leq -1} X_a$$



$$\bigcap_{a \leq -1} X_a =$$

$$\bigcup_{a \leq -1} X_a =$$

4.(3 pkt) (a) Podać interpretację symbolu  $f$ , tak aby podane zdanie było fałszywe:

$$\forall x (\sim f(x, 2) \Leftrightarrow f(x, x))$$

(b) Dla jakich wartościowań formuła:  $(p \Rightarrow q) \vee (\sim (q \Rightarrow r) \vee q)$  jest fałszywa?

Zapisać podaną formułę w postaci koniunkcji alternatyw zmiennych  $p, q, r$  lub ich zaprzeczeń.

5.(3 pkt) Stosując zasadę indukcji, udowodnić nierówność:  $3^n \geq 2^n n$ .