

ELiTM N4 27.01.2003 12:15 grupa A

1. Niech  $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Definiuję relację  $\simeq$ :  $f \simeq g$  wtedy i tylko wtedy gdy zbiory  $f(\mathbb{R})$  i  $g(\mathbb{R})$  są równo liczne. Udowodnić, że relacja  $\simeq$  jest relacją równoważności. Jakiej mocy jest zbiór klas abstrakcji, podać klasy abstrakcji. Opisać klasę abstrakcji funkcji torzsamościowo równej zero.

2. Porównać moce zbiorów:  $A = f^{-1}(\mathbb{Q})$  gdzie  $f = \sin \frac{1}{x}$ ,  $B$  - zbiór zbieżnych ciągów o wyrazach wymiernych.

3. Niech  $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Definiuję relację  $\preceq$ :  $f \preceq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq g(x)$ . Udowodnić, że relacja  $\preceq$  jest relacją częściowego porządku. Czy zbiór  $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \preceq)$  jest kratą? Pokazać, zastąpienie kwantyfikatora ogólnego kwantyfikatorem szczególnym sprawia że relacja nie jest porządkiem.

4. Narysować diagram Hassego zbioru:  $(\{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 36, 144\}, \preceq)$  gdzie  $x \preceq y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} x^k = y$ . Wskazać elementy najmniejszy, największy, minimalne, maksymalne o ile istnieją.

ELiTM N4 27.01.2003 12:15 grupa B

1. Niech  $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Definiuję relację  $\simeq$ :  $f \simeq g \Leftrightarrow f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})$ . Udowodnić, że relacja  $\simeq$  jest relacją równoważności. Jakiej mocy jest zbiór klas abstrakcji, podać klasy abstrakcji. Podać przykład klasy abstrakcji o skończonej liczbie elementów, o ile istnieje.

2. Porównać moce zbiorów:  $A = f^{-1}(\mathbb{N})$  gdzie  $f = tg \frac{1}{x}$ ,  $B$  - zbiór ciągów zero-jedynkowych nieokresowych.

3. Niech  $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Definiuję relację  $\preceq$ :  $f \preceq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} f(x) \leq g(x)$ . Udowodnić, że relacja  $\preceq$  jest relacją częściowego porządku. Czy zbiór  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \preceq)$  jest kratą? Pokazać, że relacja  $\triangleleft$  określona następująco:  $f \triangleleft g \Leftrightarrow |\{n \in \mathbb{N} : f(n) > g(n)\}| < \infty$  nie jest relacją częściowego porządku.

4. Narysować diagram Hassego zbioru:  $(\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{8}, \frac{3}{4}, \frac{8}{3}, \frac{3}{8}\}, \preceq)$  gdzie  $x \preceq y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} x \cdot k = y$ . Wskazać elementy najmniejszy, największy, minimalne, maksymalne o ile istnieją.