IMIĘ NAZWISKO. . . . . grupa C ....

1.	2.	3.	4.	Σ.

1. (4 pkt.) W zbiorze $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ określamy relację R w następujący sposób: dla $A, B \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$ARB \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y\ (x,y) \in A\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y\ (x,y) \in B\} \wedge$$
$$\{y \in \mathbb{N} \mid \exists x\ (x,y) \in A\} = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x\ (x,y) \in B\}$$

a) Pokazać, że R jest relacją równoważności.

b) Wyznaczyć klasę zbioru $\mathbb{N}\times\{1,2\}$.

c) Czy klasa każdego zbioru skończonego jest zbiorem skończonym? Odp. proszę uzasadnić.

2.(4 pkt.) W zbiorze X wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych dodatnich określona jest relacja $\preceq$:

$$(a_1,\dots,a_n) \preceq (b_1,\dots,b_m) \Leftrightarrow n \leqslant m \wedge \forall (k \leqslant n)\ a_k \geqslant b_k.$$

a) Pokazać, że $\preceq$ jest relacją częściowego porządku.

b) Skonstruować nieskończony antyłańcuch.

d) Niech $n \neq m$. Obliczyć $sup((n,m+1,0,n,1),(0,m,n+1,m))$ oraz $inf((n,m+1,0,n,1),(0,m,n+1,m))$. Czy w zbiorze $(X,\preceq)$ istnieje element najmniejszy i dlaczego?

3.(4 pkt.) Niech $\mathbb{Z}[x]$ będzie zbiorem wielomianów jednej zmiennej o całkowitych współczynnikach. Dane jest odwzorowanie

$$F : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z};\quad F(w) = w(0).$$

a) Czy F jest odwzorowaniem "na"? Odp. proszę uzasadnić.

b) Znaleźć $F^{-1}[\{0\}]$.

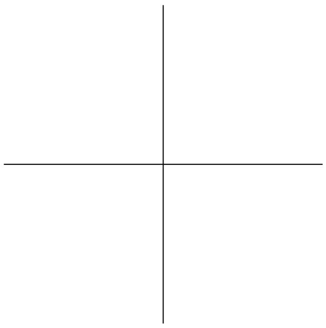
c) Znaleźć $F[A]$ oraz $F^{-1}[F[A]]$, gdzie A jest zbiorem wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych nieparzystych.

4.(3 pkt.) Niech $S \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ bdzie relacją taką, że:

$$(x, y)S(p, q) \ \Leftrightarrow xy = p - q.$$

a) Sprawdzić (z uzasadnieniem), czy relacja S jest: i) zwrotna ii) antyzwrotna iii) antysymetryczna iv) funkcją.

b) Naszkicować zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y)S(1, 1)\}$



IMIĘ NAZWISKO. . . . . grupa C ....

1.	2.	3.	4.	Σ.

1. (4 pkt.) W zbiorze $2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ określamy relację R w następujący sposób: dla $A, B \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$ARB \Leftrightarrow \forall(x,y)\in A\ \exists(a,p),(q,b)\in B\ [x=a\ \wedge\ y=b]\ \wedge$$
$$\forall(x,y)\in B\ \exists(a,p),(q,b)\in A\ [x=a\ \wedge\ y=b]$$

a) Pokazać, że R jest relacją równoważności.

b) Wyznaczyć klasę zbioru $\mathbb{R}\times\{-1,0\}$.

c) Czy klasa każdego zbioru skończonego jest zbiorem skończonym? Odp. proszę uzasadnić.

2.(4 pkt.) W zbiorze X wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych dodatnich określona jest relacja $\preceq$:

$$(a_1,\ldots,a_n)\ \preceq\ (b_1,\ldots,b_m)\ \Leftrightarrow\ n\geqslant m\ \wedge\ \forall(k\leqslant n)\ a_k|b_k.$$

a) Pokazać, że $\preceq$ jest relacją częściowego porządku.

b) Skonstruować nieskończony antyłańcuch.

d) Niech $n\neq m$. Obliczyć $sup((n,m+1,0,n,1),(0,m,n+1,m))$ oraz $inf((n,m+1,0,n,1),(0,m,n+1,m))$. Czy w zbiorze $(X,\preceq)$ istnieje element największy i dlaczego?

3.(4 pkt.) Niech $\mathbb{Z}[x]$ będzie zbiorem wielomianów jednej zmiennej o całkowitych współczynnikach. Dane jest odwzorowanie

$$F:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z};\quad F(w)=w(1).$$

a) Czy F jest odwzorowaniem różnowartościowym? Odp. proszę uzasadnić.

b) Znaleźć $F^{-1}[\{0\}]$.

c) Znaleźć $F[A]$ oraz $F^{-1}[F[A]]$, gdzie A jest zbiorem wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych parzystych.

4.(3 pkt.) Niech $S \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ bdzie relacją taką, że:

$$(x, y)S(p, q) \ \Leftrightarrow x - y = pq.$$

a) Sprawdzić (z uzasadnieniem), czy relacja S jest: i) zwrotna ii) antyzwrotna iii) antysymetryczna iv) funkcją.

b) Naszkicować zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (x, y)S(1, 1)\}$